Přednáška 2, 5. 3. 2007

$$(c_n)_{n\geq 1} = (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots)$$

c_n je liché $\iff n = 2^m$, protože ($n \geq 2$)

$$c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-2} c_2 + c_{n-1} c_1$$

$\equiv 0 \pmod 2$ pro liché $n > 1$ a

$\equiv c_{n/2}^2 \equiv c_{n/2}$ pro sudé n.

Výsledek o paritě c_n plyne z $c_1 = 1$ indukcí.

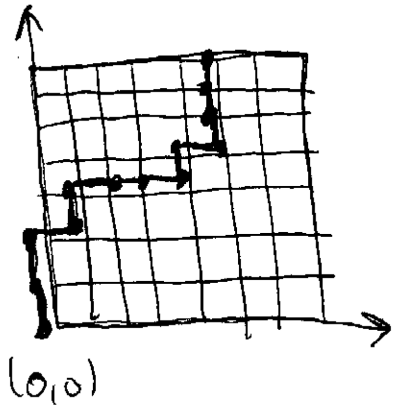
Důsledek Posloupnost Catalanových čísel nesplňuje žádnou lineární rekurenci s konstantními koeficienty.

D. Když $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z}$ takovou rekurenci splňuje, tj. $a_{n+k} = c_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \ \forall n \geq 1$, kde $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{Z}$ jsou konstanty, potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $(a_n \bmod m)_{n\geq 1}$ eventuálně periodická, tj. existují $n_0, p \in \mathbb{N}$ taková, že $a_n \equiv a_{n+p} \pmod{m}$ pro $n > n_0$. To plyne z holubníkového principu. Ale $(C_n)_{n \geq 1}$ není eventuálně periodická mod 2. $\boxtimes$

<u>Kombinatorický důkaz vzorce $C_n = \underbrace{|T(n)|}_{\text{\# (zakoř. rov.) stromů na } n \text{ vrcholech}} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ pro Catalanova čísla</u>

<u>Mřížová cesta z a do b</u>: $a, b \in \mathbb{Z}^2$, je to posloupnost mř. bodů (bodů v rovině s celočíselnými souřadnicemi) $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^2$ taková, že $v_0 = a$, $v_k = b$ a

$$v_{i+1} - v_i = \begin{cases} (0,1) \dots \text{krok na } \underline{\text{S}}\text{ever} \\ (1,0) \dots \text{krok na } \underline{\text{V}}\text{ýchod} \end{cases}$$



př. mř. cesty

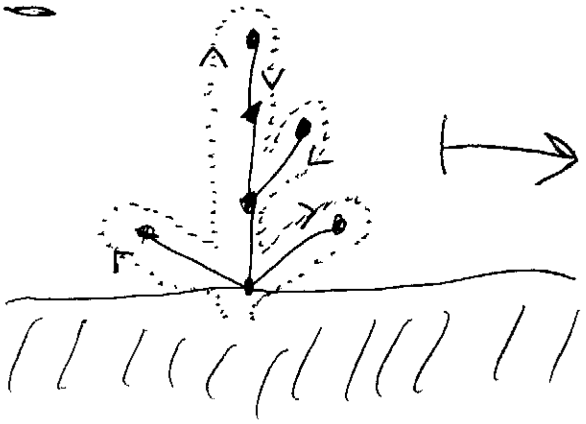
$B(n) := \{$mř. cesty z počátku do $(n,n)\}$.

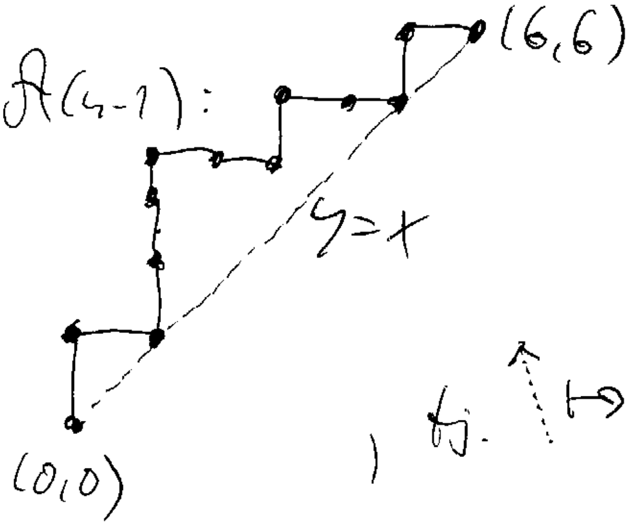
$|B(n)| = \binom{2n}{n}$ (= # slov nad abecedou $\{S, V\}$, které mají délku $2n$ a obsahují n krát S a n krát ~~Z~~ V).

$\mathcal{A}(n) := \{ p \in \mathcal{B}(n) : p$ nikdy neklesne pod přímku $y = x \}$.

$|\mathcal{T}(n)| = |\mathcal{A}(n-1)|$.
$\shortparallel$
c_n

D. Bijekce mezi $\mathcal{T}(n)$ a $\mathcal{A}(n-1)$:





, tj. $\uparrow \mapsto \uparrow$ a

$\searrow \mapsto \rightarrow$.

$\boxtimes$

$\mathcal{C}(n) := \{ p \in \mathcal{B}(n) : p$ poklesne pod $y = x \}$.

Máme $c_n = |\mathcal{T}(n)| = |\mathcal{A}(n-1)| = |\mathcal{B}(n-1)| - |\mathcal{C}(n-1)|$

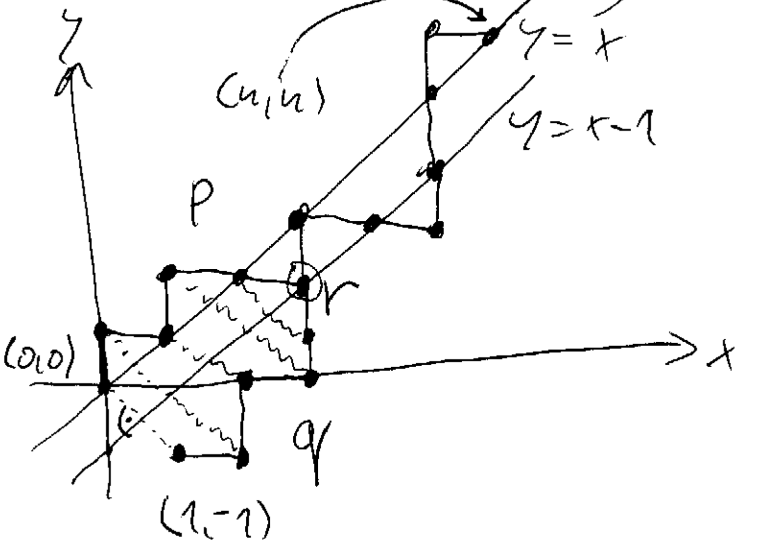
$$= \binom{2n-2}{n-1} - |\mathcal{C}(n-1)|.$$

$\mathcal{D}(n) := \{$ mř. cesty z $(1,-1)$ do $(n,n) \}$.

$|\mathcal{D}(n)| = \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Existuje bijekce mezi množinami $\mathcal{C}(n)$ a $\mathcal{D}(n)$.

D. Protože $p \in \mathcal{C}(n)$ poklesne pod $y=x$, nutně má p společný vrchol s přímkou $y=x-1$. Nechť v je první takový vrchol, postupujeme-li od $(0,0)$ do (n,n). Mř. cesta q se skládá ze zrcadlového obrazu úseku $(0,0)$–v cesty p podle přímky $y=x-1$ a zbylého úseku v–(n,n) cesty p.



Lehce se vidí, že zobrazení $p \mapsto q$ je bijekce mezi $\mathcal{C}(n)$ a $\mathcal{D}(n)$. Inverzní zobrazení vezme $q \in \mathcal{D}(n)$, najdeme první průsečík q a přímky $y=x-1$ (který nutně existuje, neboť poč. a koncový vrchol mř. cesty q, $(1,-1)$ a (n,n), leží na opačných stranách od $y=x-1$) a zrcadlí poč. úsek cesty q od $(1,-1)$ do průsečíku podle $y=x-1$. Obě zobrazení dohromady dávají bijekci $\boxtimes$

Odtud už máme vzorec pro c_n:

$$c_n = \binom{2n-2}{n-1} - |\mathcal{C}(n-1)|$$

$$= \binom{2n-2}{n-1} - |\mathcal{D}(n-1)|$$

$$= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}$$

$$= \binom{2n-2}{n-1} - \frac{n-1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$$

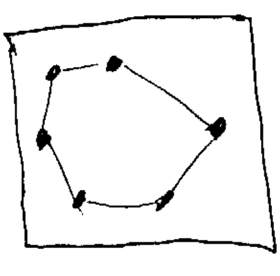
$$= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Je řada dalších struktur počítaných Catalanovými čísly — na www stránce R. Stanleyho jich naleznete v současnosti 147.

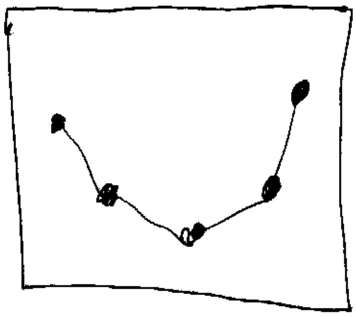
Catalanova čísla a pravděpodobnost konvexity

$\mathcal{A}_n$:= jev, že n náhodně a nezávisle na sobě vybraných bodů v jednotkovém čtverci $[0,1]\times[0,1]$ tvoří konvexní n-úhelník.

$\mathcal{B}_n$:= jev, že tyto body tvoří konvexní řetězec, tj. leží na grafu konvexní funkce.



konv. 6-úhelník ale ne konv. řetězec



konv. řetězec

$(\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n)$

$A_n := Pr(\mathcal{A}_n)$, $B_n := Pr(\mathcal{B}_n)$, $C_n := Pr(\mathcal{B}_n | \mathcal{A}_n)$

= podmíněná pravděpodobnost, že těch n bodů tvoří konv. řetězec, když už tvoří konv. n-úhelník.

Obecně $Pr(\mathcal{B}_n | \mathcal{A}_n) = \dfrac{Pr(\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}_n)}{Pr(\mathcal{A}_n)}$, ale zde

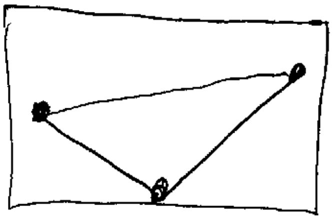
Kvůli $B_n \subset \mathcal{A}_n$ máme $Pr(B_n \cap \mathcal{A}_n) = Pr(B_n)$, takže

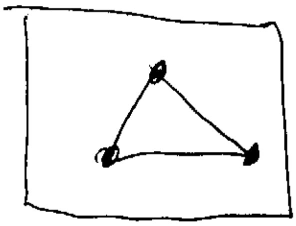
$$Pr(C_n) = \frac{Pr(B_n)}{Pr(\mathcal{A}_n)} = \frac{B_n}{A_n}.$$

$\boxed{\text{Věta (P. Valtr, 1997)}}$ $Pr(C_n) = \frac{1}{c_n}$.

"C_n

Např. pro $n=3$ (konv.) trojúhelník vypadá dvěma způsoby:





je to konv. řetězec

není to konv. řetězec

a ty mají stejnou pravděpodobnost (jak ukazuje zobrazení „převrať vzhůru nohama"), takže

$Pr(C_3) = 1/2$ $\left(= \frac{1}{c_3}\right)$.

Problém (otevřený) Zobecnit tento argument pro $n > 3$. (Valtrův dk. je založen a spočtení $Pr(B_n)$ a $Pr(\mathcal{A}_n)$ zvlášť.)
