Přednáška 2, 9. října 2019

Normovaná tělesa. Ostrowskiho věta. Opakování

Normované těleso. *Normované těleso* je těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +, \cdot, \|\cdot\|)$ s funkcí
$$\|\cdot\|\colon F \to [0, +\infty)\ ,$$
takzvanou *normou*, která má následující tři vlastnosti.

1. Pro každé $x \in F$ je $\|x\| \ge 0$ a $\|x\| = 0$, právě když $x = 0_F$.
2. Pro každé $x, y \in F$ je $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ (multiplikativita).
3. Pro každé $x, y \in F$ je $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

V úloze 1 si můžete dokázat, že $d(x, y) = \|x - y\|$ je metrika na F. Uvedeme tři příklady normovaných těles, přesněji tři rodiny norem na tělesech.

Triviální norma. Pro každé těleso F je funkce $\|\cdot\|$ s $\|0_F\| = 0$ a $\|x\| = 1$ pro $x \ne 0_F$ normou (úloha 2), které se říká *triviální norma*.

Obvyklá absolutní hodnota. Pro těleso zlomků $F = \mathbb{Q}$ je funkce $\|\cdot\|$ s $\|x\| = |x| = x$ pro $x \ge 0$ a $\|x\| = |x| = -x$ pro $x < 0$ normou. Obecněji je i $\|x\| = |x|^c$ pro každou reálnou konstantu $c \in (0, 1]$ norma (úloha 3).

p-adické normy. Pro každou reálnou konstantu $c \in (0, 1)$, každé prvočíslo $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ a těleso zlomků $F = \mathbb{Q}$ je $\|\cdot\|$, daná pro nenulové $x \in \mathbb{Q}$ jako
$$\|x\| = c^{\mathrm{ord}_p(x)} \text{ a pro nulu jako } \|0\| = 0\ ,$$
norma. Zde pro nenulové $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je $\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b}) = m \in \mathbb{Z}$ jednoznačné celé číslo, že $\frac{a}{b} = p^m \cdot \frac{c}{d}$, kde $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ a p nedělí cd (to jest ani c ani d). Pro nulu klademe $\mathrm{ord}_p(0) = \infty$.

Dokážeme, že každá p-adická norma $\|\cdot\|$ je norma. Patrně má vlastnost 1. Její multiplikativita vyplývá z aditivity p-adického řádu: pro každé dva zlomky α a β (a každé prvočíslo p) máme rovnost
$$\mathrm{ord}_p(\alpha\beta) = \mathrm{ord}_p(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\beta) \quad \text{(úloha 5)}\ .$$
Zde $\infty + m = m + \infty = \infty + \infty = \infty$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Z minulé přednášky víme, že pro p-adické normy platí trojúhelníková nerovnost v silnější podobě,

s operací + nahrazenou maximem. Dokážeme tedy, že pro každé dva zlomky α a β (a každé prvočíslo p) je

$$\|\alpha+\beta\| \le \max(\|\alpha\|,\, \|\beta\|)\ .$$

Díky multiplikativitě normy pro každé $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ máme $\|n\alpha+n\beta\| = \|n\| \cdot \|\alpha+\beta\|$, $\|n\alpha\| = \|n\| \cdot \|\alpha\|$ a $\|n\beta\| = \|n\| \cdot \|\beta\|$. Za n vezmeme společný násobek jmenovatelů obou zlomků a můžeme předpokládat, že $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Dále můžeme předpokládat, že $\alpha\beta \ne 0$ (úloha 6). Takže

$$\alpha = p^m a,\ \ \beta = p^n b,\ \ m,\, n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\},\ \ m \le n,\ \ a,\, b \in \mathbb{Z}$$

a p nedělí ab. Tedy $m = \mathrm{ord}_p(\alpha)$, $n = \mathrm{ord}_p(\beta)$, $\alpha+\beta = p^m(a+p^{n-m}b)$ a $\mathrm{ord}_p(\alpha+\beta) \ge m$. Proto, vzhledem ke kladnému c menšímu než 1,

$$\|\alpha+\beta\| = c^{\mathrm{ord}_p(\alpha+\beta)} \le c^m = \max(c^m,\, c^n) = \max(\|\alpha\|,\, \|\beta\|)\ .$$

Může být $\alpha+\beta = 0$, ale to nevadí, protože klademe $c^\infty = 0$.

Součinová formule. „Opravdová“ p-adická norma $\|\cdot\|_p$ má $c = \frac{1}{p}$:

$$\|x\|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(x)} \text{ pro } x \ne 0 \text{ a } \|0\|_p = 0\ .$$

Důvod pro tuto volbu c je ten, že pak jsou všechny p-adické normy a absolutní hodnota $|\cdot|$, jež se někdy označuje jako $|\cdot| = |\cdot|_\infty$, svázané hezkou identitou

$$\prod_{p=2,3,5,\dots \text{ nebo } p=\infty} \|x\|_p = 1 \text{ pro každé } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ ,$$

takzvanou *součinovou formulí.* Můžete ji dokázat v úloze 7.

Věta (A. Ostrowski, 1916). *Nechť $\|\cdot\|$ je norma na tělese zlomků $\mathbb{Q}$. Pak nastává právě jedna z následujících třech možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$, že $\|x\| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p, že $\|x\| = c^{\mathrm{ord}_p(x)}$ (zde $c^\infty = 0$).*

Důkaz. Nechť $\|\cdot\|$ není tvaru 1 a není triviální. Pak díky multiplikativitě normy a úloze 4 existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| \neq 1$. Zbývá nám vyřešit dva případy.

Případ, kdy existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| > 1$. Jako n_0 označíme nejmenší takové n. Patrně podle úlohy 4 je $n_0 \geq 2$. Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že $\|n_0\| = n_0^c$. Každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme rozvinout při základu n_0 jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s,\ a_i, s \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0 \ .$$

Pro $n_0 = 10$ dostáváme obvyklý desetinný zápis. Takže

$$\begin{aligned} \|n\| &= \|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\| \\ &\leq \|a_0\| + \|a_1\| \cdot \|n_0\| + \|a_2\| \cdot \|n_0\|^2 + \cdots + \|a_s\| \cdot \|n_0\|^s \\ &\leq 1 + n_0^c + n_0^{2c} + \cdots + n_0^{sc} \leq n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^c}\right)^i \\ &\leq n^c C \ . \end{aligned}$$

Zde jsme na druhém řádku použili multiplikativitu normy a trojúhelníkovou nerovnost. Na třetím řádku jsme použili nerovnost $\|m\| \leq 1$ pro $0 \leq m < n_0$ a definici čísla c. Na čtvrtém řádku jsme konstantu $C > 0$ definovali součtem uvedené nekonečné řady, jíž je konvergentní geometrická řada, a použili jsme nerovnost $n_0^s \leq n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ tedy platí nerovnost $\|n\| \leq C n^c$.

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s $C = 1$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativita normy a nerovnost dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C \left(n^m\right)^c = C \left(n^c\right)^m \ .$$

Vezmeme-li z výrazu m-tou odmocninu, dostaneme $\|n\| \leq C^{1/m} n^c$. Pro $m \to \infty$ máme $C^{1/m} \to 1$. Skutečně $\|n\| \leq n^c$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Podobně odvodíme opačnou nerovnost $\|n\| \geq n^c$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší rozvoj při základu n_0 dává, že $n_0^{s+1} > n \geq n_0^s$. Z $\|n_0^{s+1}\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|$ (trojúhelníková nerovnost) máme

$$\begin{aligned} \|n\| &\geq \|n_0^{s+1}\| - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\ &\geq n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^c\right) \\ &\geq n^c C' \ . \end{aligned}$$

Na prvním řádku jsme použili definici čísla c a již dokázaný horní odhad $\|m\| \leq m^c$, $m \in \mathbb{N}$. Na druhém řádku jsme použili nerovnost $n \geq n_0^s$. Na třetím řádku jsme konstantu $C' > 0$ definovali uvedeným výrazem v závorkách (který nezávisí na n) a použili jsme nerovnost $n_0^{s+1} > n$. Trik s m-tou odmocninou opět dává, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $\|n\| \geq n^c$.

Takže pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je $\|n\| = n^c$. Z multiplikativity normy a úlohy 4 dostáváme $\|x\| = |x|^c$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Podle úlohy 3 je $c \in (0, 1]$. Odvodili jsme, že norma $\|\cdot\|$ má tvar 2.

Zbylý případ, kdy $\|n\| \leq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| < 1$. Jako n_0 opět označíme nejmenší takové n a opět je $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1$$

(použili jsme multiplikativitu normy a to, že $\|m\| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$). Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $\|q\| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $\|q\| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$. Podle známého výsledku v elementární teorii čísel v úloze 8 existují celá čísla a a b, že $aq^m + bp^m = 1$. Znormováním této rovnosti dostáváme spor

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \leq \|a\| \cdot \|q\|^m + \|b\| \cdot \|p\|^m < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \,.$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $\|a\| \leq 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

Tedy $\|q\| = 1$ pro každé prvočíslo q různé od p. Odtud pomocí multiplikativity normy, úlohy 4 a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\|x\| = \left\| \prod_{q=2,\,3,\,5,\,\ldots} q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,\,3,\,5,\,\ldots} \|q\|^{\mathrm{ord}_q(x)} = \|p\|^{\mathrm{ord}_p(x)} = c^{\mathrm{ord}_p(x)} \,,$$

kde $c = \|p\| \in (0, 1)$; $\|0\| = c^{\mathrm{ord}_p(0)} = c^{\infty} = 0$ též. Ukázali jsme, že norma $\|\cdot\|$ má tvar 3. □

Předchozí důkaz jsem převzal z knihy

N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer-Verlag, New York, 1984, která obsahuje mnoho zajímavého o p-adické normě $\|\cdot\|_p$ a odvozené p-adické analýze. Bohužel se už s tímto tématem musíme rozloučit, podívejte se ale alespoň na úlohu 9.

Opakování. Připomeneme si některé výsledky o metrických prostorech již probrané v Matematické analýze II. Pro metrický prostor (M, d), bod $a \in M$ a reálné číslo $r > 0$ se množina bodů

$$B(a,\, r) = \{x \in M \mid d(a,\, x) < r\}$$

nazývá *(otevřenou) koulí (se středem a a poloměrem r)*. Množina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud

$$\forall\, a \in X\ \exists\, r > 0 :\ B(a, r) \subset X\ .$$

Množina $X \subset M$ je *uzavřená*, je-li $M \setminus X$ otevřená množina. Pro posloupnost $(a_n) \subset M$ a bod $a \in M$ píšeme

$$\lim a_n = a, \text{ pokud } \lim d(a_n,\, a) = 0$$

a posloupnosti, pro něž takové a existuje, nazýváme *konvergentní*. Všimněte si, že poslední limita je limita posloupnosti reálných čísel (vzhledem k obvyklé metrice $|x-y|$ na reálné ose). Uzavřené množiny jsou charakterizované uzavřeností na limity (úloha 11). Množiny $\emptyset$ a M jsou obě otevřené i uzavřené, rodina otevřených množin je uzavřená na konečné průniky a libovolná sjednocení a pro uzavřené množiny to platí s prohozenými operacemi průniku a sjednocení. Konečně nazveme $X \subset M$ *kompaktní* množinou, když

$$\forall\, (a_n) \subset X\ \exists\, (a_{k_n}) \subset (a_n) :\ \lim a_{k_n} = a \in X\ .$$

V kompaktní množině X tedy každá posloupnost bodů má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Například $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ *není* kompaktní podmnožina euklidovského prostoru $(\mathbb{R}, d_2)$, protože posloupnost $(1 - \frac{1}{n}) \subset [0, 1)$ nemá konvergentní podposloupnost s limitou v $[0, 1)$ (úloha 12).

Úlohy

1. Dokažte, že pro normu $\|\cdot\|$ na tělese je $d(x, y) = \|x - y\|$ metrika.
2. Dokažte, že triviální norma je norma.
3. Dokažte, že $\|x\| = |x|^c$, $x \in \mathbb{Q}$ a $c > 0$, je norma, právě když $c \le 1$.

4. V každém normovaném tělese je $\|0_F\| = 0$, $\|1_F\| = \|-1_F\| = 1$, $\|x\| = \|-x\|$ a $\|1_F/x\| = 1/\|x\|$ (pro $x \neq 0_F$).

5. Dokažte, že $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ je aditivní funkce.

6. Ukažte, že silná trojúhelníková nerovnost platí, když je jeden z prvků nula. Bylo v našem důkazu silné trojúhelníkové nerovnosti pro p-adické normy opravdu nutné redukovat ho na případ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ a pak na nenulové $\alpha\beta$?

7. Dokažte součinovou formuli. Jde opravdu o nekonečný součin?

8. Připomeňte si důkaz faktu, že pro každá dvě nesoudělná celá čísla m, n existují taková čísla $a, b \in \mathbb{Z}$, že $am + bn = 1$.

9. Uvažme metrický prostor $(\mathbb{Q}, \|x - y\|_p)$ s p-adickou metrikou. Dokažte, že v něm nekonečná řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{Q} ,$$
konverguje, právě když v něm $\lim a_n = 0$.

10. Dokažte, že každá koule je otevřená množina.

11. Nechť (M, d) je metrický prostor a $X \subset M$. Dokažte, že množina X je uzavřená, právě když pro každou posloupnost $(a_n) \subset X$ platí: má-li (a_n) limitu $a \in M$, pak $a \in X$.

12. Proč $(1 - \frac{1}{n}) \subset [0, 1)$ nemá konvergentní podposloupnost s limitou v $[0, 1)$?