2. přednáška 8. října 2007

Konvergence v metrických prostorech. Posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) *konverguje* (je *konvergentní*), když v M existuje takový bod a, že

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0.$$

Pak říkáme, že bod a je *limitou* posloupnosti (a_n) a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ či $a_n \to a$ pro $n \to \infty$. Ekvivalentní formulace konvergence (a_n) k a jsou

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

a

$$\forall \text{okolí } U \text{ bodu } a\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n \in U.$$

Posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ je *cauchyovská*, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m > n > n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Platí triviální implikace, že konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace platí v *úplných* metrických prostorech, k nimž se později dostaneme.

Tvrzení 1.2. *Podmnožina $X \subset M$ je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti (a_n) obsažené v X také leží v X.*

Důkaz. Nechť X není uzavřená. Pak $M\backslash X$ není otevřená, a tak existuje takový bod $a \in M\backslash X$, že pro každé n koule $B(a, 1/n)$ protíná X. Z průniku $B(a, 1/n) \cap X$ vybereme bod a_n. Pak $a_n \to a$ pro $n \to \infty$, $(a_n) \subset X$, ale $a \notin X$.

Nechť je X uzavřená a posloupnost $(a_n) \subset X$ je konvergentní, $a_n \to a$ pro $n \to \infty$. Kdyby limita a neležela v X, ležela by v otevřené množině $M\backslash X$ a existovalo by $r > 0$, že $B(a, r) \subset M\backslash X$. Pro nějaké n_0 bychom pak měli, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \in B(a, r) \subset M\backslash X$. To ale je ve sporu s tím, že $a_n \in X$ pro každé n. Takže $a \in X$. □

Připomínáme, že konvergence posloupnosti je relativní pojem: posloupnost $(a_n) \subset X \subset M$, která je konvergentní v celém metrickém prostoru (M, d), nemusí být konvergentní v podprostoru (X, d) s indukovanou metrikou, protože $\lim a_n$ nemusí ležet v X. Takže třeba $(1/n)$ je konvergentní v $\mathbf{R}$, ale ne v podprostoru $(0, 1]$. Pro uzavřené množiny X tato obtíž nenastává.

Uzávěr množiny $X \subset M$ je množina

$$\overline{X} = \{a \in M \mid a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ pro nějakou } (a_n) \subset X\}.$$

Protože každý bod $a \in X$ je limitou konstantní posloupnosti $(a, a, a, \ldots)$, máme $X \subset \overline{X}$. K X tedy přidáme všechny limitní body X (stačí přidat jen ty ležící mimo X):

$$\overline{X} = X \cup \{\text{limitní body } X\}.$$

Další ekvivalentní definice uzávěru množiny je tato:

$$\overline{X} = \bigcap_{V \supset X,\ V \text{ je uzavřená}} V.$$

$\overline{X}$ je tedy ve smyslu inkluze nejmenší uzavřená množina obsahující X. Je jasné, že X je uzavřená, právě když $X = \overline{X}$.

Jako příklady uvažme podmnožiny $\mathbf{Q}$ a $(0,1)$ v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$. Pak $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ a $\overline{(0,1)} = [0,1]$. Množina

$$X = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (0,1]\},$$

graf funkce $\sin(1/x)$ na intervalu $(0,1]$, má v euklidovské rovině $\mathbf{R}^2$ uzávěr

$$\overline{X} = X \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$

Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory. (M_1, d_1) a (M_2, d_2) buďte dva metrické prostory a $f: M_1 \to M_2$ buď zobrazení mezi nimi. Řekneme, že f je spojité v bodu $a \in M_1$, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Ekvivalentní definice spojitosti f v a pomocí okolí bodů je, že

$$\forall \text{okolí } V \text{ bodu } f(a)\ \exists \text{okolí } U \text{ bodu } a :\ x \in U \Rightarrow f(x) \in V.$$

Další ekvivaletní definice spojitosti f v a je *Heineho definice*: f je spojité v a, právě když pro každou posloupnost $(a_n) \subset M_1$ platí

$$(a_n \to a, n \to \infty) \Rightarrow (f(a_n) \to f(a), n \to \infty).$$

Zobrazení f je *spojité*, když je spojité v každém bodu prostoru M_1. Spojitost zobrazení lze popsat jen s použitím otevřených množin.

Tvrzení 1.3. *Zobrazení $f: M_1 \to M_2$ mezi metrickými prostory je spojité, právě když vzor každé otevřené množiny v M_2 je otevřená množina v M_1:*

$$V \subset M_2 \text{ je otevřená} \Rightarrow f^{-1}(V) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in V\} \text{ je otevřená v } M_1.$$

Analogická ekvivalence platí i pro vzory uzavřených množin.

Důkaz. Nechť je $f: M_1 \to M_2$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), $V \subset M_2$ je otevřená množina a $a \in f^{-1}(V)$ je libovolný bod. Máme $f(a) \in V$, takže existuje takové $r > 0$, že $B_2(f(a), r) \subset V$ (index 2 zde odkazuje k metrice d_2). Díky spojitosti existuje takové $s > 0$, že $f(B_1(a,s)) \subset B_2(f(a), r)$. Tedy $B_1(a,s) \subset f^{-1}(V)$. Množina $f^{-1}(V)$ obsahuje libovolný bod s nějakou koulí kolem něj a je tedy otevřená.

Nechť f splňuje podmínku pro vzory otevřených množin a $a \in M_1$ je libovolny bod. Pro dané $\varepsilon > 0$ uvážíme kouli $B_2(f(a), \varepsilon)$. Je to otevřená množina, takže její vzor $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$ je otevřená množina v M_1. Protože bod a v ní leží, existuje takové $\delta > 0$, že $B_1(a, \delta) \subset f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$. Takže $f(B_1(a, \delta)) \subset B_2(f(a), \varepsilon)$ a f je spojité v a.

Ekvivalence spojitosti s podmínkou pro vzory uzavřených množin plyne z právě dokázaného přechodem k doplňkům a s pomocí identity $f^{-1}(M_2 \backslash X) = M_1 \backslash f^{-1}(X)$. □

Skládání zobrazení zachovává spojitost. Jsou-li zobrazení $f : M_1 \to M_2$ a $g : M_2 \to M_3$ mezi metrickými prostory spojitá, je i složené zobrazení $h = g(f)$ spojité. Je-li f spojité v bodu $a \in M_1$ a g je spojité v bodu $f(a) \in M_2$, je h spojité v bodu $a \in M_1$.

Homeomorfismus. Bijekce $f : M_1 \to M_2$ mezi dvěma metrickými prostory je *homeomorfismus*, když zobrazení f i inverzní zobrazení f^{-1} je spojité. Existuje-li taková bijekce mezi M_1 a M_2, jsou oba metrické prostory *homeomorfní*. Homeomorfismus je druh izomorfismu metrických prostorů, který je slabší než izometrie. Každá izometrie je homeomorfismem, ale obecně ne naopak. Homeomorfismus je izomorfismus struktur otevřených množin obou prostorů. Homeomorfní metrické prostory se nedají odlišit jen pomocí otevřených množin.

Jako příklad uvažme zobrazení $x \mapsto \tan x$ mezi euklidovskými prostory $(-\pi/2, \pi/2)$ a $\mathbf{R}$. Toto zobrazení je homeomorfismus (je bijektivní a $\tan x$ i inverz $\arctan x$ je spojité zobrazení). Tyto prostoty zjevně nejsou izometrické, protože první je omezený, ale druhý ne. (Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *omezená*, když existuje bod $a \in M$ a poloměr $r > 0$ tak, že $X \subset B(a, r)$.)

Na druhou stranu zobrazení $f(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ mezi euklidovskými prostory

$$[0, 2\pi) \text{ a } K = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\},$$

což je interval v $\mathbf{R}$ a jednotková kružnice v $\mathbf{R}^2$, homeomorfismem není. Je sice bijektivní a spojité, ale inverzní zobrazení spojité není (není spojité v bodu $(1, 0)$). Jak uvidíme, metrické prostory $[0, 2\pi)$ a K ani homeomorfní nejsou, protože první z nich není kompaktní, ale druhý je.

Kompaktní metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *kompaktní*, když má každá posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ konvergentní podposloupnost. Podmnožina $X \subset M$ je kompaktní, když je podprostor (X, d) s indukovanou metrikou kompaktní. Z MAI dobře víme, že intervaly $[a, b]$ jsou kompaktní podmnožiny v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$. Důležitost kompaktních množin spočívá v tom, že spojité reálné funkce na nich nabývají maxima a minima a také v tom, že spojitá zobrazení definovaná na kompaktních prostorech jsou stejnoměrně spojitá.

Tvrzení 1.4. *Kompaktnost se zachovává následujícími operacemi.*

1. *Přechodem k uzavřenému podprostoru.*

2. Obrazem spojitým zobrazením.

3. Kartézským součinem.

Důkaz. 1. Nechť je (M, d) kompaktní, podmnožina $X \subset M$ je uzavřená a $(a_n) \subset X$ je libovolná posloupnost. Díky kompaktnosti celého prostoru má konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou $a \in M$. Díky uzavřenosti X ale a leží v X, takže (a_{k_n}) je konvergentní i v podprostoru (X, d). Proto je X též kompaktní.

2. Nechť $f : M_1 \to M_2$ je spojité zobrazení mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), přičemž (M_1, d_1) je kompaktní. Tvrdíme, že $f(M_1)$ je kompaktní podmnožina M_2. Nechť $(b_n) \subset f(M_1)$ je libovolná posloupnost. Pro každé n zvolíme $a_n \in M_1$ tak, že $f(a_n) = b_n$. Z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou $a \in M_1$. Protože $a_{k_n} \to a$ pro $n \to \infty$ a f je spojité v a, podle Heineho definice spojitosti máme i $b_{k_n} = f(a_{k_n}) \to f(a) = b$ pro $n \to \infty$. Takže (b_n) má konvergentní podposloupnost a $f(M_1)$ je kompaktní.

3. Přenecháváme pilnému čtenáři jako cvičení (úloha 9). □

Z části 2 plyne, že homeomorfní metrické prostory buď současně jsou nebo současně nejsou kompaktní. V druhém příkladu na homeomorfismus $[0, 2\pi)$ není kompaktní ($(2\pi - 1/n)$ nemá konvergentní podposloupnost), ale jednotková kružnice K kompaktní je (jako spojitý obraz kompaktní množiny, $K = f([0, 2\pi])$). Tudíž $[0, 2\pi)$ a K nejsou homeomorfní. A co $[0, 2\pi]$ a K (oba prostory jsou teď kompaktní)? Viz úloha 7.

V příští přednášce dokážeme další výsledky o kompaktních prostorech:

Tvrzení 1.5. *Kompaktní podmnožiny v metrickém prostoru jsou uzavřené a omezené.*

Věta 1.6. *Kompaktní podmnožiny euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$ jsou právě a jen uzavřené a omezené množiny.*

Ukážeme si také příklady omezených a uzavřených množin, které nejsou kompaktní.

Úlohy

1. Dokažte, že konvergentní posloupnost je cauchyovská a že množina členů cauchyovské posloupnosti je omezená.

2. Nechť X je konečná množina v metrickém prostoru, jejíž každý bod je izolovaný. Co lze říci o uzávěru X?

3. Co lze říci o uzávěru množiny, která nemá hraniční body?

4. Nechť $N = (0,1) \cup (2,3]$ a (N,d) je metrika indukovaná z euklidovského prostoru $\mathbf{R}$. Jaké jsou uzávěry množin $X = (0,1)$ a $X = (2,3)$ v prostoru N?

5. Nechť (N,d) je jako v předchozí úloze a $f: N \to \mathbf{R}$ je na $(0,1)$ rovna konstantě a a na $(2,3]$ je rovna konstantě b. Pro jaké hodnoty a a b je f spojitá funkce?

6. Nechť $N = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup \{0\}$ a (N,d) je opět metrika indukovaná z euklidovského prostoru $\mathbf{R}$. Popište spojité funkce $f: N \to \mathbf{R}$.

7. Ukažte, že euklidovské prostory $I = [0, 2\pi]$ a jednotková kružnice $K = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ nejsou homeomorfní. Návod: Dá se $I \backslash \{1\}$ vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných a disjunktních otevřených množin? Dá se tak vyjádřit K po vyhození jednoho bodu?

8. Ukažte, že euklidovské prostory $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$ nejsou homeomorfní. Návod: stejný argument, jako v předchozí úloze.

9. Dokažte část 3 Tvrzení 1.4: když jsou (M_1, d_1) a (M_1, d_1) kompaktní, je součinový prostor $(M_1 \times M_2, d)$ (pro definici viz konec 1. přednášky) rovněž kompaktní.