Přednáška 2 — Úplnost $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ zaplňuje „díry" v $\mathbb{Q}$. Nechť $(X, <)$ je lineární uspořádání a $Y \subset X$. $a \in X$ je horní mez (dolní mez) Y: $\forall y \in Y: y \leq a$ $(y \geq a)$. Množina Y je shora (zdola) omezená: má alespoň jednu horní (dolní) mez. Y je omezená, je-li shora i zdola omezená. Největší (nejmenší) prvek množiny Y, též maximum (minimum) Y, je horní (dolní) mez Y, která leží v Y. Takže

$a = \max(Y) \iff a \in Y$, $y < a$ pro každé $y \in Y$ různé od a.

Podobně pro $\min(Y)$.

Příklad $(\mathbb{Z}, <)$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ je zdola omezená, ale ne shora, $\min(\mathbb{N}) = 1$, $\max(\mathbb{N})$ neexistuje.

Princip indukce: Každá $\neq \emptyset$ podmnožina $\mathbb{N}$ má minimum.

$(X, <)$ buď lin. uspořádání a $Y \subset X$. Supremum množiny Y, $\sup(Y)$, je nejmenší horní mez množiny Y:

$\sup(Y) := \min(\{\text{horní meze } Y\})$.

Podobně infimum Y je $\inf(Y) := \max(\{\text{dolní meze } Y\})$.

Sup. a inf. nemusí existovat. Pokud má Y maximum, je to i supremum; podobně pro min a inf.

<u>$\sup(Y)$, $\inf(Y)$ nemusí ležet v Y!</u> $(X, <)$ lin. usp., $Y \subset X$

$a = \sup(Y) \iff \bullet\ \forall y \in Y: y \leq a$

$\bullet\ \forall x \in X, x < a\ \exists y \in Y: x < y.$

Podobně pro infimum. Supremum je „největší prvek" Y a Infimum je „nejmenší prvek" Y.

<u>Příklady</u> Y není shora omezená $\Rightarrow \sup(Y)$ neexistuje.

$Y = \emptyset \Rightarrow \sup(Y) = \min(X)$.

$Y \neq \emptyset$ a konečná $\Rightarrow$ Y má min i max a $\min(Y) = \inf(Y)$ a $\max(Y) = \sup(Y)$.

$(\mathbb{Q}, <)$, $Y = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq \alpha < 1\}$. Pak $\inf(Y) = \min(Y) = 0$, $\max(Y)$ neex., $\sup(Y) = 1$.

Ale: $(\mathbb{Q}, <)$, $Y = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha < \sqrt{2}\} \rightarrow \sup(Y)$ neex., i když je Y neprázdná a shora omezená, protože $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ale: $(\mathbb{R}, <)$, $Y = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha < \sqrt{2}\}$ (teď Y bereme jako podmnožinu $\mathbb{R}$) $\rightarrow \sup(Y) = \sqrt{2}$.

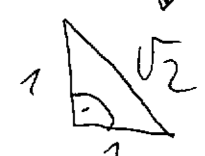
Supremum, narozdíl od maxima, je relativní, závisí na obklopujícím lin. uspořádání.

Tvrzení (iracionalita $\sqrt{2}$) Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální, rovnice $x^2 = 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ řešení.

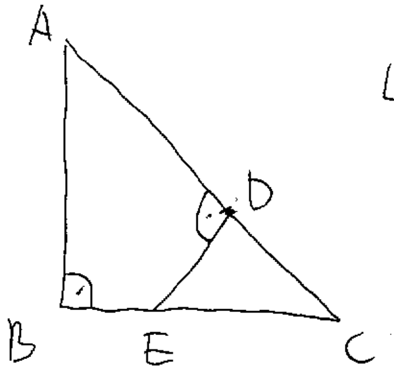
<u>D</u>. 1. důkaz, aritmetický. Pro spor nechť $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

pro nějaký zlomek $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Vezmeme $\frac{a}{b}$ v základním tvaru, tj. a, b jsou nesoudělná celá čísla. Máme rovnost $a^2 = 2b^2$, takže a^2 je sudé číslo a tedy i a je sudé číslo (proč?), $a = 2c$, $c \in \mathbb{Z}$. Dosadíme a máme $2c^2 = b^2$, takže, stejnou úvahou, b je sudé číslo. Čísla a, b jsou obě sudá, čili soudělná. To je ale spor s jejich výchozí nesoudělností. $\boxtimes$

2. důkaz, geometrický. Pythagorova věta:



Pokud $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, můžeme zvětšením dostat rovnoramenný pravoúhlý $\triangle$ s celočíselnými délkami stran (b, b, a). Nechť ABC je nejmenší takový $\triangle$, např. s nejkratší přeponou. Udělejme tuto konstrukci:



$|AB| = |AD| = |BC|$.

$\rightsquigarrow \triangle DEC$ je rovněž rovnoramenný a pravoúhlý ($\measuredangle DEC = \measuredangle DCE = 45°$). Dále $|BE| = |ED| = |DC|$ – první = plyne ze symetrie 4-úhelníku ADEB a druhá z rovnoramennosti $\triangle DEC$. Takže

$|ED| = |DC| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| \in \mathbb{N}$

$|EC| = |BC| - |BE| = |BC| - |ED| = 2|AB| - |AC| \in \mathbb{N}$.

$\rightsquigarrow \triangle DEC$ má celočí. délky stran – spor s minimalitou $\triangle ABC$. $\boxtimes$

Viděli jsme, že lin. uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ obsahuje $\neq \emptyset$ a shora om. podmnožiny, které nemají supremum. V $\mathbb{R}$ jsou tyto díry zaplněny.

<u>Věta (o supremu)</u> Každá neprázdná a shora omezená množina reálných čísel má supremum.

<u>D</u>. Příště. $\boxtimes$

Totéž pro infimum: každá $\neq \emptyset$ a zdola om. množina $Y \subset \mathbb{R}$ má $\inf(Y)$.

Uvedeme teď důsledky věty o supremu.

<u>Důsledek</u> (o $\sqrt{2}$) Rovnice $x^2 = 2$ má v $\mathbb{R}$ řešení.

<u>D</u>. $(X, <) = (\mathbb{R}, <)$, $Y = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0,\ \alpha^2 < 2\}$.
Nechť $\beta := \sup(Y)$ (existuje podle v. o supremu, protože např. $1 \in Y$ a 2 je horní mez Y). Ukážeme, že $\beta^2 = 2$. Vyloučíme možnosti $\beta^2 < 2$ a $\beta^2 > 2$.

<u>Nechť $\beta^2 < 2$</u>. Vezmeme malé $\varepsilon > 0$ a β o ε zvětšíme: $(\beta+\varepsilon)^2 = \beta^2 + \varepsilon(2\beta+\varepsilon)$. Protože $\beta \leq 2$, pokud vezmeme $0 < \varepsilon < \frac{2-\beta^2}{5}, 1$, máme

$$(\beta+\varepsilon)^2 = \beta^2 + \varepsilon(\underbrace{2\beta}_{\leq 2}+\underbrace{\varepsilon}_{<1}) < \beta^2 + \varepsilon 5 < 2.$$

Takže $\beta + \varepsilon \in Y$, což není možné, protože β je horní mez Y.

<u>Nechť $\beta^2 > 2$</u>. Nyní β o malé $\varepsilon > 0$ zmenšíme:
$(\beta-\varepsilon)^2 = \beta^2 - 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2 > \beta^2 - 4\varepsilon$ $(0 < \beta \leq 2,\ \varepsilon^2 \geq 0)$.

Pro každé ε splňující $0<\varepsilon<\frac{\beta^2-2}{4}$ tedy platí, že $(\beta-\varepsilon)^2>\beta^2-4\varepsilon>2$. Pro každé takové ε tedy $\beta-\varepsilon\notin Y$. Tedy $0<\varepsilon<\frac{\beta^2-2}{2}\Rightarrow(\beta-\varepsilon,\beta]\cap Y=\emptyset$. To je ale ve sporu s druhou vlastností $\beta=\sup(Y)$, protože každý takový interval (pro jakkoli malé ε) by měl obsahovat prvek Y.

Možnosti $\beta^2<2$, $\beta^2>2$ vedou ke sporu, zbývá, že $\beta^2=2$. $\boxtimes$

Pomocí věty o supremu se dokáže řešitelnost v $\mathbb{R}$ spousty dalších rovnic vedle $x^2=2$.

Cantorova věta o vnořených intervalech

Připomeňme, že pro $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$ se definuje $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$.

Věta (Cantor). Nechť $[a_1,b_1],[a_2,b_2]$ jsou do sebe vnořené intervaly: $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots$ Pak existuje $\alpha\in\mathbb{R}$, které leží v každém z nich, $\alpha\in[a_n,b_n]$ pro každé n, tj. $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$.

D. Příště, pomocí v. o supremu. $\boxtimes$

Poznámka. Pokud délky intervalů b_n-a_n pro $n\to\infty$ jdou k 0, tj. $\forall\varepsilon>0\ \exists N: n>N\Rightarrow b_n-a_n<\varepsilon$, je číslo α určené jednoznačně: $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\alpha\}$.