Kombinatorické počítání

Přednáška 1, 26. 2. 2007

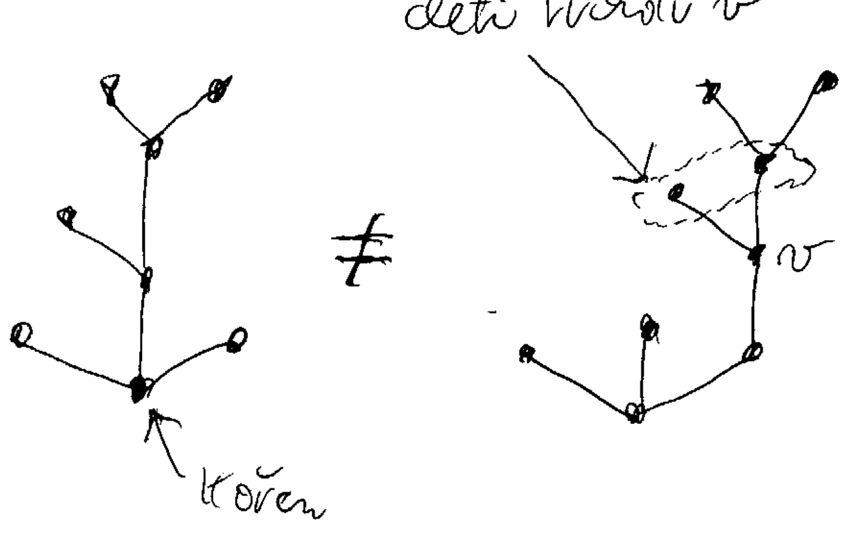
1 Co je to enumerativní kombinatorika

$S_0, S_1, S_2, \ldots$ konečné množiny nějakých struktur, zajímá nás počítací funkce $n \mapsto |S_n|$, $f(n) = |S_n| =$ počet struktur v S_n.

<u>generující (vytvořující) funkce</u> posloupnosti $(f(n))_{n \geq 0}$: $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = |S_0| + |S_1| x + |S_2| x^2 + \ldots$

Úvodní příklad s Catalanovými čísly

<u>zakořeněné rovinné stromy</u>, stručně <u>stromy</u>:



každá množina dětí jednoho vrcholu je lin. uspořádaná

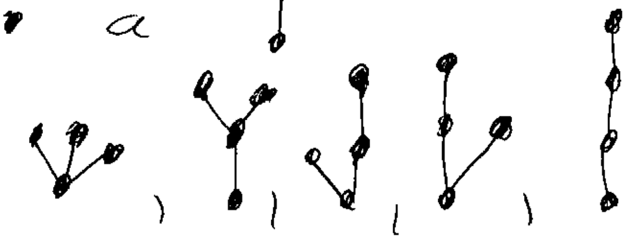
$\mathcal{T}(n)$:= množ. (těchto) stromů s n vrcholy

$= \{T \in \mathcal{T} : v(T) = n\}$, $\mathcal{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(n)$.

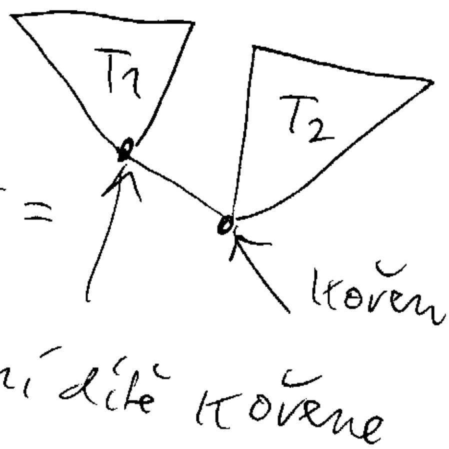
množ. všech stromů ($\mathcal{T}$) — # vrcholů stromu T ($v(T)$)

$c_n := |\mathcal{T}(n)|$ = # stromů s n vrcholy

$c_n = ??$ $c_1 = c_2 = 1$: 

$c_3 = 2$:  $c_4 = 5$: 

$c_5 = ?$

$T \neq \bullet \Rightarrow T =$ 

$v(T) = v(T_1) + v(T_2)$

$T \mapsto (T_1, T_2)$ je bijekce mezi množinami

$\mathcal{T}(n)$ a $\{(T_1, T_2) : T_i \in \mathcal{T},\ v(T_1) + v(T_2) = n\}$

$(n \geq 2)$. Takže máme rekurenci

$$\boxed{c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \quad \text{pro } n \geq 2, \qquad c_1 = 1.}$$

Teď se už c_5 snadno spočte:

$c_5 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14$. A teď GF:

$$C = C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad C^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)^2 = \dots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i c_{n-i}\right)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = C - x$$

a máme kv. rovnici $C^2 = C - x$, $C^2 - C + x = 0$.

Má řešení $C = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x})$, kde

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-4x)^k =$$

binom. rozvoj

$$= 1 - \underbrace{\binom{1/2}{1}}_{1/2} 4x + \underbrace{\binom{1/2}{2}}_{-1/8}(4x)^2 - \dots = 1 - 2x - 2x^2 - \dots$$

pro $\oplus$ bychom měli $C = 1 + \dots$?

Takže $C = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ a

$$c_n = \underbrace{[x^n]\,C(x)} = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n$$

zkratka pro „koeficient u x^n v řadě $C(x)$“ | $= (-1)^{n+1} 2^{2n-1}\binom{1/2}{n}$

$$= (-1)^{n+1}\, 2^{2n-1}\, \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$$

$$= (-1)^{2}\, 2^{2n-1}\, \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdots\left((n-1)-\frac{1}{2}\right)}{n!}$$

$$= \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot 2^{n-1}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2n-4)(2n-3)(2n-2)}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{2}\cdot 2)\cdot(\cancel{2}\cdot 3)\cdots(\cancel{2}(n-2))\cdot(\cancel{2}(n-1))\cdot n!}\cdot \cancel{2^{n-1}}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\cdot n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Tedy $\boxed{c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \text{ pro } n \geq 1.}$

$\boxed{\text{Catalanova čísla}}$

Odtud máme jinou rekurenci:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!\cdot(n-1)!^2}{(2n-2)!\cdot n!^2}$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2\cancel{n}(2n-1)}{\cancel{n^2}} = \frac{4n-2}{n+1}, \text{ a tak}$$

$$\boxed{c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} c_n}$$ Např. $c_6 = \frac{18}{6} \cdot c_5$

$= 3 \cdot 14$

$= 42.$

Jde to i bez explicitního vzorce pro c_n:

$C = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$, takže

$$C' = -\frac{1}{2}\frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \text{ a}$$

$$\boxed{(1-4x) \cdot C' = 1 - 2C.}$$ $C' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$

Porovnání koeficientů u x^n dává $(n \geq 1)$

$(n+1)c_{n+1} - 4n c_n = -2c_n$, čili znovu

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4n-2}{n+1} c_n.$$

I kdybychom neuměli vyřešit kv. rovnici $C^2 - C + x = 0$, stále ji můžeme derivovat:

$2C \cdot C' - C' + 1 = 0$, $C' = \frac{1}{1-2C} =$

$= \frac{C - 1/2}{(1-2C)(C-1/2)} = \frac{C-1/2}{-2C^2+2C-1/2} = \frac{1/2 - C}{2\underbrace{(C^2-C)}_{=-x \text{ podle kv. rovnice}}+\frac{1}{2}}$

$= \frac{1/2 - C}{-2x+\frac{1}{2}} = \frac{1-2C}{1-4x}$, tedy znovu

$C' \cdot (1-4x) = 1 - 2C$, a tedy $c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n$.

Jak rychle c_n roste pro $n \to \infty$?

Stirlingova formule: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+o(1))$

$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2n(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$\sim \frac{1}{4n} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}$ $\sim 1/4$

$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot n^{-3/2} \cdot 4^n$, takže

$$\boxed{c_n \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot n^{-3/2} \cdot 4^n \text{ pro } n \to \infty}$$

Tato asymptotika se dá dostat i ze vztahu $C = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$, ba dokonce i z rovnice $C^2 - C + x = 0$, ale je k tomu už třeba teorie.

Úložka Viděli jsme, že

$$(c_n)_{n \geq 1} = (1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots).$$

Pro jaké n je c_n liché?

Nápověda: plyne to z jednoho vztahu či rekurence pro c_n, které jsme odvodili na přednášce.