Přednáška 1, 2. října 2019

Kapitola 1: metrické prostory

Definice metrických prostorů, izometrie. *Metrické prostory* formalizují jev vzdálenosti. Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny M a zobrazení

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}$$

se dvěma proměnnými zvaného *metrika* či *vzdálenost*, které pro každé tři prvky $x, y, z \in M$ splňuje následující tři axiomy.

a) $d(x,\, y) = 0 \iff x = y$.
b) $d(x,\, y) = d(y,\, x)$ (symetrie).
c) $d(x,\, y) \le d(x,\, z) + d(z,\, y)$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Z axiomů snadno plyne (úloha 3), že vždy $d(x, y) \ge 0$ — vzdálenost je vždy nezáporná.

Izometrie dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce

$$f\colon M \to N$$

zachovávající vzdálenosti: pro každé dva prvky $x, y \in M$ máme $d(x, y) = e(f(x), f(y))$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory (M, d) a (N, e) *izometrické*. Znamená to, že jsou prakticky nerozlišitelné.

Příklady metrických prostorů. Axiomy a) a b) se ověří obvykle snadno, nicméně viz úlohu 9. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost je většinou obtížnější, viz závěrečné úlohy.

Příklad 1. $M = \mathbb{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a $p \ge 1$ je reálné číslo. Metriky $d_p(x, y)$ definujeme vztahem

$$d_p(x,\, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Pro $n = 1$ dostáváme klasickou metriku $|x - y|$ na $\mathbb{R}$. Pro $p = 2$ a $n \ge 2$ dostáváme *euklidovskou metriku*

$$d_2(x,\, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Euklidovským prostorem rozumíme každý metrický prostor tvaru (X, d_2), kde $X \subset \mathbb{R}^n$, se zúženou euklidovskou metrikou. Pro $p = 1$ a $n \geq 2$ dostáváme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x,\, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x,\, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \ .$$

Příklad 2. M je množina všech omezených funkcí $f\colon X \to \mathbb{R}$ definovaných na množině X. Pak máme *supremovou metriku*

$$d(f,\, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \ .$$

Pokud $M = \mathcal{C}[a, b]$ (množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a, b]$), supremum se nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,\, g) = \max_{x \in [a,\, b]} |f(x) - g(x)| \ .$$

Příklad 3. Vezmeme $M = \mathcal{C}[a, b]$ a reálné číslo $p \geq 1$. Jako v prvním příkladu máme metriky

$$d_p(f,\, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{(Riemannův integrál)} \ .$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu (úloha 8). Výjimečný je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot, \cdot)$, v prvním i ve třetím příkladu, povstává ze skalárního součinu na vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných vlastností.

Vezmeme-li širší třídu funkcí $M = \mathcal{R}[a, b]$ (funce mající na $[a, b]$ Riemannův integrál), je funkce $d_p(f, g)$ dobře definovaná, ale nesplňuje axiom a) a nedostáváme metriku. Změníme-li totiž hodnotu funkce $f \in \mathcal{R}[a, b]$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in \mathcal{R}[a, b]$, ale stále $d_p(f, f_0) = 0$. Tato potíž se odstraní tak, že místo s $\mathcal{R}[a, b]$ se pracuje s $\mathcal{R}[a, b]/\!\sim$ pro vhodnou relaci ekvivalence $\sim$.

Příklad 4. Souvislý graf $G = (M, E)$ s množinou vrcholů M nese metriku

$$d(u,\, v) = \text{počet hran na jakékoli nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v \ .$$

Příklad 5. Je-li A množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu* nebo také *editační metriku* $(u = a_1a_2 \dots a_m, v = b_1b_2 \dots b_m)$

$$d(u,\, v) = \text{počet souřadnic } i, \text{ pro něž } a_i \neq b_i \; .$$

Udává nejmenší počet změn v písmenech pro přepsání u ve v.

Příklad 6. Na dvourozměrné sféře

$$M = S_2 = \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

máme metriku

$$d(x,\, y) = \text{délka nejkratší křivky ležící v } S_2 \text{ a spojující } x \text{ a } y \; .$$

Podrobněji se $d(x,y)$ pro $x \neq y$ rovná délce kratšího z obou kruhových oblouků hlavní kružnice $K(x,y)$ určených body x a y; $d(x,x) = 0$. Zde $K(x,y)$ je průnik S_2 s rovinou určenou počátkem souřadnic (což je i střed S_2) a body x a y na S_2. Leží-li tyto tři body na přímce (x a y jsou protinožci), není $K(x,y)$ určená jednoznačně, ale hodnota $d(x,y) = \pi$ je jednoznačně určená. Vždy $0 \leq d(x,y) \leq \pi$. Tuto metriku nazýváme *sférickou metrikou.* Lze ji zúžit na podmnožinu S_2, například na horní polosféru

$$S_2^+ = \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geq 0\} \; .$$

Dokážeme, že S_2^+ se sférickou metrikou není izometrická žádnému euklidovskému prostoru. Totéž tedy platí i pro celou sféru či obecněji pro každou sférickou oblast obsahující hemisféru: nedá se „splácnout“ do roviny ani žádného jiného euklidovského prostotu se zachováním všech vzdáleností.

Tvrzení (sféra není plochá). *Žádné dva metrické prostory (S_2^+, d) a (X, d_2), kde první je horní polosféra se sférickou metrikou a druhý s $X \subset \mathbb{R}^n$ je euklidovský, nejsou izometrické.*

Důkaz. Popíšeme vlastnost čtveřic bodů $t, u, v, w \in \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru, která není splněna ve sférické metrice. Vyjadřuje ji implikace

$$d_2(t,\, u) = d_2(t,\, v) = d_2(u,\, v) > 0 \;\&\; d_2(t,\, w) = d_2(w,\, u) = \frac{d_2(t,\, u)}{2}$$

$$\Rightarrow d_2(w,\, v) = \frac{\sqrt{3} \cdot d_2(t,\, v)}{2} < d_2(t,\, v) \; .$$

Její předpoklad říká, že body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a že w má od t i u vzdálenost $x/2$. Pro body t, u a w pak trojúhelníková nerovnost platí jako rovnost:

$$d_2(t,\, u) = d_2(t,\, w) + d_2(w,\, u)\ .$$

Podle geometrie euklidovských prostorů pak bod w leží na úsečce tu a současně v nadrovině bodů stejnou vzdáleností od t i u. Proto je w středem úsečky tu (úloha 16.) Konfigurace našich čtyř bodů je tedy rovinná (všechny leží v jediné rovině) a úsečka vw je výška spuštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhelníka na stranu tu. Podle Pythagorovy věty se její délka $d_2(v, w)$ rovná $(\sqrt{3}/2)x$, což je závěr implikace.

Když na horní polosféře nalezneme čtyři body $t, u, v, w \in S_2^+$ splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr, budeme hotovi: izometrie mezi polosférou a euklidovským prostorem neexistuje, neboť každá izometrie z definice implikaci zachovává. Vezmeme body

$$t = (1,\, 0,\, 0),\ u = (0,\, 1,\, 0),\ v = (0,\, 0,\, 1) \text{ a } w = (1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2},\, 0)\ .$$

Lehce se vidí, že $d(t, u) = d(t, v) = d(u, v) = \frac{\pi}{2}$ a $d(t, w) = d(w, u) = \frac{d(t,u)}{2} = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól“ ($x_3 = 1$), t, u a w leží na „rovníku“ ($x_3 = 0$) a w je střed oblouku tu. Ale všechny body rovníku mají od pólu v stejnou vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $d(w, v) = d(t, v)$ a závěr implikace neplatí. $\square$

V kostce, na horní polosféře jsme nalezli takové čtyři body, že jejich šest vzájemných sférických vzdáleností nelze euklidovsky realizovat. Nestačily by už tři body (úloha 12)? A co když polosféry nahradíme malou sférickou oblast, kam se naše konfigurace čtyř bodů nevejde (úloha 11)?

Příklad 7. Nechť (M, d) je metrický prostor. Řekneme, že d je *nearchimédovská* metrika nebo též *ultrametrika*, pokud každé tři body $x, y, z \in M$ splňují *silnou trojúhelníkovou nerovnost*

$$d(x,\, y) \leq \max(d(x,\, z),\, d(z,\, y))\ .$$

Je silnější než trojúhelníková, takže každá ultrametrika je metrika. Důležité vlastnosti ultrametriky jsou uvedeny v úloze 14.

Základním příkladem ultrametrického prostoru je p-adická metrika $(\mathbb{Q}, d_p)$ na množině zlomků (úloha 13); p nyní označuje prvočísla, $p =$

$2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, a má jiný význam než v příkladech 1 a 3. Tato metrika se jednoduše zapíše pomocí *p-adické normy*

$$\| \cdot \|_p \colon \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$$

jako $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$. A jak je definovaná p-adická norma? Pro nenulový zlomek $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ jako

$$\left\| \frac{a}{b} \right\|_p := \left(\frac{1}{p} \right)^m ,$$

kde $m \in \mathbb{Z}$ je takové jednoznačně určené celé číslo (úloha 15), že

$$\frac{a}{b} = p^m \cdot \frac{c}{d},\ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \text{ a } p \text{ nedělí } cd\ .$$

Pro nulu klademe $\|0\|_p = 0$. Základní vlastnosti p-adické normy jsou: (i) $\|\alpha\|_p \geq 0$ a je 0, právě když $\alpha = 0$, (ii) $\|\alpha\beta\|_p = \|\alpha\|_p \cdot \|\beta\|_p$ a

$$\text{(iii) } \|\alpha + \beta\|_p \leq \max(\|\alpha\|_p,\ \|\beta\|_p)\ .$$

Odtud se snadno odvodí, že d_p splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost. Zlomek $\frac{1}{p}$ v definici $\| \cdot \|_p$ lze nahradit jakoukoli konstantou $c \in (0, 1)$ a nic se nezmění, (i)–(iii) se zachovají, ale volba $c = \frac{1}{p}$ má svůj důvod, který vysvětlíme na příští přednášce.

Úlohy

1. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro Hammingovu metriku.
2. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro grafovou metriku.
3. Ukažte, že z axiomů metrického prostoru plyne nezápornost metriky.
4. Plyne symetrie z ostatních axiomů metriky?
5. Dokažte vzorec pro maximovou metriku: $\lim_{p \to +\infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y)$.
6. Odvoďte z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$)

   $$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

   trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou metriku. Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost dokažte též.

7. Ověřte trojúhelníkovou nerovnost pro supremovou metriku.

8. Dokažte vzorec pro maximovou metriku pro funkce: je-li f spojitá na $[a, b]$, pak

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

9. Ověřte v příkladu 3 pro $M = \mathcal{C}[a, b]$ axiom a) metrického prostoru.

10. Dokažte pro sférickou metriku trojúhelníkovou nerovnost.

11. Dokažte, že žádný sférický vrchlík (část sféry S_2 odseknutá rovinou) se sférickou metrikou není izometrický euklidovskému prostoru.

12. Dá se libovolný sférický trojúhelník izometricky realizovat v rovině (s euklidovskou metrikou)?

13. Ověřte, že p-adická metrika je opravdu ultrametrika.

14. Dokažte, že v ultrametrickém prostoru je každý trojúhelník rovnoramenný a že když $d(x, z) \neq d(z, y)$, pak silná trojúhelníková nerovnost platí jako rovnost.

15. Dokažte, že číslo $m \in \mathbb{Z}$ z definice $\| \cdot \|_p$ je jednoznačně určené.

16. Dokažte podrobně, že když pro $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ je $d_2(x, z) = d_2(z, y) = d_2(x, y)/2 > 0$, potom je z středem úsečky xy.