

Přednáška 1, 20. února 2015

Nejprve motivace — souvislost primitivních funkcí s plochami rovinných útvarů. Funkce F je *primitivní* k funkci f , když na daném definičním oboru platí vztah $F' = f$. Pro nezápornou a spojitou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uvažme rovinný útvar

$$U(a, b, f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \& \ 0 \leq y \leq f(x)\} .$$

Jeho plochu, ať je to cokoli, označíme jako

$$\int_a^b f := \text{plocha}(U(a, b, f)) .$$

Jde tedy o plochu části roviny vymezené osou x , grafem funkce f a svislými přímkami $y = a$ a $y = b$. Dva základní vztahy mezi plochou a derivací jsou následující. *První základní věta analýzy* říká, že pro každé $c \in [a, b]$ máme

$$\left(\int_a^x f \right)'(c) = f(c)$$

— derivace funkce, jejíž argument x je horní mez útvaru $U(a, x, f)$ a hodnota je jeho plocha, se rovná výchozí funkci f . Plocha $F(x) = \int_a^x f$ jako funkce je tedy primitivní k f . Podle *druhé základní věty analýzy* pro každou funkci g , která je na $[a, b]$ primitivní k f , je

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) .$$

Známe-li nějakou funkci primitivní k f , a spoustu jich lze odvodit prostým obrácením pravidel pro derivování elementárních funkcí, můžeme ihned spočítat plochu útvaru $U(a, b, f)$. Obě věty přesně zformulujeme a dokážeme v části přednášky o Riemannově integrálu, kdy také přesně zavedeme pojem plochy $\int_a^b f$. Nejprve se ale musíme zabývat vlastnostmi primitivních funkcí — kdy má funkce primitivní funkci, zda je jednoznačně určena a podobně.

Funkce primitivní k dané funkci

Definice (primitivní funkce). *Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval a dvě funkce*

$$F, f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

splňují na I vztah $F' = f$, pak F nazveme funkcí primitivní k funkci f (na intervalu I). (V krajních bodech $x \in I$ se $F'(x)$ rozumí příslušná jednostranná derivace.)

U limitění a derivování je výsledek operace jednoznačný, pokud existuje, ale primitivní funkce určená jednoznačně není. Hned uvidíme, že daná funkce buď nemá žádnou primitivní funkci nebo jich má nekonečně mnoho. Vzhledem k linearitě derivování je i operace nalezení primitivní funkce lineární: Je-li F na I primitivní k f , G ke g a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom je funkce

$$\alpha F + \beta G$$

na I primitivní k funkci $\alpha f + \beta g$.

Tvrzení (o nejednoznačnosti primitivní funkce). *Je-li F na intervalu I primitivní k f , potom množina všech funkcí primitivních k f na I je*

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} .$$

Všechny funkce primitivní k f se tedy dostanou posunem libovolné z nich o konstantu.

Důkaz. Derivace konstantní funkce je nulová, a tak $(F + c)' = F' + 0 = f$ pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každou funkci F primitivní k f na I . Na druhou stranu, jsou-li F a G primitivní k f na I , pak jejich rozdíl $H = F - G$ má na I nulovou derivaci: pro každé $\gamma \in (a, b)$ je $H'(\gamma) = F'(\gamma) - G'(\gamma) = f(\gamma) - f(\gamma) = 0$. Pro libovolné dva body $\alpha < \beta$ z I tak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme rovnost

$$H(\beta) - H(\alpha) = (\beta - \alpha)H'(\gamma) = (\beta - \alpha)0 = 0 ,$$

pro nějaký bod $\gamma \in (\alpha, \beta)$, takže $H(\alpha) = H(\beta)$ a H je na I konstantní. Tedy existuje konstanta c , že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in I$ a $F = G + c$. \square

Tvrzení (spojitost primitivní funkce). *Je-li F na intervalu I primitivní k f , potom je F na I spojitá.*

Důkaz. Ze ZS víme, že existence vlastní (jednostranné, jde-li o krajní bod) derivace funkce v bodě implikuje její spojitost v daném bodě. Protože $F'(\alpha)$ existuje a rovná se $f(\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$, je F na I spojitá. \square

Věta (spojitá funkce má primitivní funkci). *Je-li f na intervalu I spojitá, pak má na I primitivní funkci F .*

Důkaz. To dokážeme podrobně a přesně později. Jak bylo naznačeno v úvodu, F se dá definovat jako plocha útvaru pod grafem funkce f . Jiný způsob, jak větu dokázat, je vyjádřit f jako $f = \lim f_n$ (stejněměrná limita), kde f_n jsou lomené čáry s primitivními funkcemi F_n , a položit $F = \lim F_n$. \square

Může mít nespojitá funkce primitivní funkci? Může.

Příklad (nespojité funkce s primitivní funkcí). *Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná jako*

$$f(x) = 2x \sin(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2}) \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

má na reálné ose primitivní funkci, i když není spojitá v bodě 0.

Důkaz. Uvažme funkci $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou pro $x \neq 0$ jako $F(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ a pro $x = 0$ jako $F(0) = 0$. Derivování podle vzorců pro $x \neq 0$ dává $F' = f$. V nule podle definice derivace spočteme, že

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x^{-2}) = 0,$$

protože $|x \sin(x^{-2})| \leq |x|$ pro každé $x \neq 0$. Tedy $F'(0)$ existuje a opět $F'(0) = f(0)$. Tudíž $F' = f$ na \mathbb{R} a F je na \mathbb{R} primitivní k f . Funkce f není spojitá v 0, protože je v každém okolí nuly dokonce neomezená shora i zdola — pro $x \rightarrow 0$ její graf kmitá s neomezeně vzrůstající amplitudou i frekvencí. \square

V MAI jsme si dokázali větu, že funkce spojitá na intervalu na něm nabývá všech mezihodnot, to jest zobrazuje ho zase na interval. Této vlastnosti funkcí se říká i *Darbouxova vlastnost*, podle francouzského matematika Jeana-Gastona Darboux (1842–1917). Darboux dokázal, že funkce s primitivní funkcí mají tuto vlastnost.

Věta (funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost). *Je-li F na intervalu I primitivní k f , potom f na I nabývá všech mezihodnot.*

Důkaz. Vezměme nějakou mezihodnotu $c: f(x_1) < c < f(x_2)$ pro nějaké dva body $x_1 < x_2$ z I . Nalezneme $x^* \in I$, dokonce $x^* \in (x_1, x_2)$, že $f(x^*) = c$. (Pokud $f(x_1) > c > f(x_2)$, následující argument se snadno upraví náhradou minima maximem.) Funkce

$$H(x) = F(x) - cx$$

je na I spojitá, dokonce tam má vlastní derivaci

$$H'(x) = (F(x) - cx)' = f(x) - c.$$

Podle věty ze ZS nabývá na kompaktním intervalu $[x_1, x_2]$ minimum v bodě $x^* \in [x_1, x_2]$. Protože $H'(x_1) = f(x_1) - c < 0$, je H klesající v bodě x_1 , což dává, že pro nějaké $\delta > 0$ máme $x \in (x_1, x_1 + \delta) \Rightarrow H(x) < H(x_1)$. Tudiž $x^* \neq x_1$. Obdobně z $H'(x_2) > 0$ plyne, že $x^* \neq x_2$. Tedy $x^* \in (x_1, x_2)$ a podle kritéria extrému ze ZS musí být $H'(x^*) = f(x^*) - c = 0$. Tedy $f(x^*) = c$. \square

Důsledek (příklad funkce bez primitivní funkce). *Funkce $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definovaná jako $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$, nemá na \mathbb{R} (ani na žádném jiném intervalu obsahujícím 0) primitivní funkci.*

Důkaz. Podle Darbouxovy věty, protože sgn nenabývá všech mezihodnot: i když nabývá hodnotu -1 a 1 , nenabývá nikde třeba hodnotu $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$. \square

Značení. Skutečnost, že funkce F je na intervalu I primitivní k funkci f , se značí jako

$$F = \int f, \text{ a píšeme též } F = \int f + c,$$

abychom zdůraznili, že každé posunutí F o konstantu je rovněž primitivní funkce k f . Symbolu $\int f$ je třeba rozumět tak, že označuje množinu všech funkcí primitivních k f na daném intervalu.

Pro derivaci součinu máme Leibnizův vzorec $(fg)' = f'g + fg'$. Invertováním obdržíme následující důležitý výsledek pro primitivní funkce.

Věta (integrace per partes). *Jsou-li $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě funkce (I je interval) a F, G jim odpovídající primitivní funkce, pak na I platí rovnost*

$$\int fG + \int Fg = FG + c.$$

Podrobněji řečeno, funkce fG a Fg mají na I primitivní funkce, jejichž součet se na I vždy rovná, až na aditivní konstantu c , funkci FG .

Důkaz. Podle předpokladu je f na I spojitá a podle hořejšího tvrzení tam je i primitivní funkce G spojitá. Takže součinnová funkce fG je tam též spojitá a podle hořejší zatím nedokázané věty má na I primitivní funkci (funkce) $\int fG$. Podobně máme i primitivní funkci $\int Fg$. Podle hořejší poznámky o linearitě je součet $\int fG + \int Fg$ primitivní funkcí k funkci $fG + Fg$. K té je ale primitivní i funkce FG , protože Leibnizův vzorec dává $(FG)' = fG + Fg$. Podle tvrzení o nejednoznačnosti primitivní funkce tedy pro jistou konstantu c platí, že $\int fG + \int Fg = FG + c$. \square

Vzorec pro integraci per partes se uvádí obvykle v ekvivalentním tvaru

$$\int F'G = FG - \int FG' .$$

Pokud tedy umíme spočítat pro dané dvě funkce F a G se spojitými derivacemi ($F' = f$ a $G' = g$) primitivní funkci k FG' , dostáváme podle tohoto vzorce primitivní funkci k $F'G$.

Příklad. Díky $x' = 1$ a $(\log x)' = 1/x$ na intervalu $(0, +\infty)$ máme

$$\int \log x = \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' = x \log x - \int 1 = x \log x - x .$$

Přesněji, $\int \log x = x \log x - x + c$ (na $(0, +\infty)$). Zderivováním snadno zkontrolujeme správnost odvozeného vzorce.