Přednáška 1, 27. února 2014 (část i rozšíření)

Na přednášce jsme odvodili různé relace pro *Catalanova čísla* c_n. Předně, c_n je počet zakořeněných rovinných stromů s n vrcholy, takže $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 5$, $c_6 = 14$ a tak dál. Kombinatorickým rozkladem takového stromu na dva podstromy jsme odvodili rekurenci

$$c_1 = 1,\ c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \ \text{ pro } n \geq 2\ . \tag{1}$$

Odtud (respektive přímým překladem kombinatorického rozkladu do řeči generujících „funkcí") jsme odvodili, že (formální mocninná řada) $C = C(x) = \sum_{n\geq 1} c_n x^n$, *generující funkce čísel* c_n, splňuje algebraický vztah

$$C - x = C^2\ . \tag{2}$$

To ze dvou řešení kvadratické rovnice (2) (kde? — v okruhu form. moc. řad $\mathbb{C}[[x]]$), které dává $C(x)$, je

$$C(x) = (1/2)(1 - \sqrt{1-4x})\ . \tag{3}$$

Zde $\sqrt{1-4x}$ je jediný prvek $\mathbb{C}[x]]$, jehož čtverec je $1-4x$ a konstantní člen 1, tedy (podle formální binomické věty)

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-4x)^n\ .$$

Odtud a z (3) snadnými úpravami dostáváme pro c_n známý explicitní vzoreček

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\ . \tag{4}$$

Odtud nebo z (3) nebo už z (2), jak jsme si předvedli, snadno odvodíme pro c_n jednodušší rekurenci

$$c_1 = 1,\ nc_n - (4n-6)c_{n-1} = 0 \ \text{ pro } n \geq 2, \quad \text{tj.}\ \ c_n = \frac{4n-6}{n} c_{n-1}\ . \tag{5}$$

Je to jednoduchá lineární rekurence řádu 1, ale nemá konstantní koeficienty neboť závisejí na n. Lineární rekurence s konstantními koeficienty je třeba populární

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \text{ pro } n \geq 3\ ,$$

která definuje posloupnost *Fibonacciových čísel* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$. Nedala by se Catalanova čísla definovat nějakou podobnou rekurencí s konstantními koeficienty? Třemi způsoby dokážeme, že nikoli.

Tvrzeníčko (Catalan není jako Fibonacci). *Catalanova čísla c_n nesplňují žádnou lineární rekurenci s konstantními koeficienty tvaru*

$$c_n = \alpha_1 c_{n-1} + \alpha_2 c_{n-2} + \cdots + \alpha_k c_{n-k},\ n > n_0\ , \tag{6}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ (řád rekurence) a $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k \neq 0$, jsou konstanty.

Důkaz 1, teorií čísel. Lehce se vidí, že každá posloupnost celých čísel (a_n) splňující rekurenci typu (6) je pro každé $m \in \mathbb{N}$ eventuálně periodická modulo m: existuje perioda $p \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_1$ máme

$$a_{n+p} \bmod m = a_n \bmod m\ .$$

Máme totiž jen nejvýše m^k možných k-tic zbytků

$$(a_n \bmod m, a_{n+1} \bmod m, \dots, a_{n+k-1} \bmod m)$$

a jakmile se jedna zopakuje, začne se modulo m posloupnost (a_n) opakovat. Ale Catalanova čísla se tak nechovají, protože z rekurence (1) se indukcí snadno dokáže, že

$$c_n \bmod 2 \equiv 1 \iff n = 2^m,\ m \in \mathbb{N}_0\ .$$

A to není eventuálně periodická posloupnost (lichá c_n jsou oddělena úseky sudých c_n s délkami jdoucími do nekonečna). Proto (c_n) nesplňuje žádnou rekurenci typu (6). □

Důkaz 2, algebrou. Lehce se vidí, že každá posloupnost celých čísel (a_n) splňující rekurenci typu (6) má racionální generující funkci $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, dokonce speciálního tvaru:

$$A(x) = \frac{a(x)}{1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_k x^k},\ a \in \mathbb{Z}[x]\ .$$

Kdyby ale $C(x)$ měla tento tvar, znamenalo by to podle (3), že

$$\sqrt{1-4x} = \frac{p(x)}{q(x)},\ p, q \in \mathbb{Z}[x]\ ,$$

to jest, že mocninná řada $\sqrt{1-4x}$ je (v $\mathbb{C}[[x]]$) podílem dvou celočíselných polynomů (kde $q(0) \neq 0$). Zkrácením dosáhneme, že p a q jsou nesoudělné, tj. nemají společný kořen. Umocněním dostaneme

$$(1-4x)q(x)^2 = p(x)^2 \ .$$

Takže $\frac{1}{4}$ je kořenem $p(x)$, tedy alespoň dvojnásobným kořenem $p(x)^2$, tedy je $\frac{1}{4}$ kořenem $q(x)$. Přece jen mají p a q společný kořen, což je spor. Takže $\sqrt{1-4x}$ není racionální a (c_n) nesplňuje žádnou rekurenci typu (6). Úplně stejně se v analýze dokazuje, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$

Důkaz 3, asymptotickou analýzou. Není tak těžké dokázat (na přednášce to později uděláme), že každá posloupnost celých čísel (a_n) splňující rekurenci typu (6) má explicitní vyjádření tvaru

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} p_i(n)\gamma_i^n \ , \tag{7}$$

kde $\gamma_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ jsou různá čísla a $p_i \in \mathbb{C}[x]$ nenulové polynomy (viz třeba známý Binetův vzorec pro Fibonacciova čísla, který později též odvodíme). Mohl by takový vzorec fungovat pro Catalanova čísla? Z jejich asymptotiky vyplývá, že ne. Známá *Stirlingova formule*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n, \ n \to \infty \ ,$$

(později ji na přednášce dokážeme) a (4) dávají pro c_n asymptotiku

$$c_n \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n, \ n \to \infty \ . \tag{8}$$

Je zapotřebí dokázat, že pro $n \to \infty$ jsou (8) a (7) neslučitelné. Pokud vám to přijde zcela jasné (vždyť tam předsi je koeficient $n^{-3/2}$), pak přehlížíte problém, který způsobují kořeny γ_i v (7) se stejným modulem. Když se maximum $|\gamma_i|$ nabývá pro jediné i, řekněme $i = 1$, pak skutečně pro $n \to \infty$ nemohou a_n v (7) mít asymptotiku (8), protože pak

$$a_n \sim cn^s\gamma_1^n \ ,$$

kde $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a $s = \deg p_1 \in \mathbb{N}_0$. Obecně je ale kandidát na asymptoticky vedoucí člen v (7) složitější:

$$a_n = (c_1 e^{n\varphi_1 i} + c_2 e^{n\varphi_2 i} + \cdots + c_t e^{n\varphi_t i})n^s\gamma^n + O(n^{s-1}\gamma^n) \ ,$$

kde $c_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $t \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ jsou různá čísla (jsou to argumenty kořenů γ_i s maximálním modulem) a $\gamma > 0$ je maximální modul $|\gamma_i|$. Pokud $t \geq 2$, může se pro některá $n \in \mathbb{N}$ výraz

$$v(n) = c_1 e^{n\varphi_1 i} + c_2 e^{n\varphi_2 i} + \cdots + c_t e^{n\varphi_t i}$$

téměř nebo i úplně vyrušit, vedoucí člen přestane být vedoucím a máme problém. Dokážeme, že pro nekonečně mnoho n se to nestane.

Lemma. *Nechť pro $j = 1, 2, \ldots, t$ jsou $c_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a čísla $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ jsou vzájemně různá. Pak*

$$\limsup_{n\to\infty} |v(n)| = \limsup_{n\to\infty} |c_1 e^{n\varphi_1 i} + c_2 e^{n\varphi_2 i} + \cdots + c_t e^{n\varphi_t i}| > 0\ .$$

Tím jsme, modulo důkaz lemmatu, hotovi. Máme totiž $\delta > 0$, že $|v(n)| > \delta$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Triviálně $|v(n)| \leq c = |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_t|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\delta + O(1/n) < \left| \frac{a_n}{n^s \gamma^n} \right| \leq c + O(1/n)$$

pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. A to je už zjevně neslučitelné s (8). Proto c_n nesplňují nikdy rekurenci typu (6). $\square$

Zbývá ale dokázat lemma. Kdyby neplatilo, znamená to prostě, že

$$\lim_{n\to\infty} v(n) = \lim_{n\to\infty} (c_1 e^{n\varphi_1 i} + c_2 e^{n\varphi_2 i} + \cdots + c_t e^{n\varphi_t i}) = 0\ .$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ tedy, když vezmeme dost velké $n_k \in \mathbb{N}$, je $|v(n_k + m)| \leq 1/k$ pro každé $m = 1, 2, \ldots, t$. Podle Cramerova pravidla z lineární algebry máme

$$c_j = \frac{\det M(j)}{\det(\exp((n_k + m)\varphi_l i))_{m,l=1}^t},\ j = 1, 2, \ldots, t\ ,$$

kde $t \times t$ matice $M(j)$ v čitateli vznikne z matice ve jmenovateli náhradou j-tého sloupce sloupcem $(v(n_k + 1), v(n_k + 2), \ldots, v(n_k + t))^t$. Triviální odhad (definice determinantu a trojúhelníková nerovnost) dává, že

$$|\det M(j)| \leq \frac{t!}{k}\ .$$

Matice ve jmenovateli je po vytknutí $\exp(n_k \varphi_l i)$ z l-tého sloupce Vandermondova (v l-tém sloupci zůstanou mocniny $\exp(\varphi_l i)^m$, $m = 1, 2, \dots, t$), takže díky vzorci pro determinant Vandermondovy matice a díky různosti fází φ_l je

$$| \det(\exp((n_k + m)\varphi_l i))_{m,l=1}^t | = \prod_{1 \le l < l' \le t} | \exp(\varphi_l i) - \exp(\varphi_{l'} i)| = d > 0$$

nenulová konstanta nezávislá na k. Pak ale, pro každé $j = 1, 2, \dots, t$,

$$|c_j| \le \frac{t!}{dk} \to 0, \ k \to \infty \ ,$$

a všechna čísla c_j jsou nuly, což je ovšem spor.