Přednáška 1 Organizační poznámky

① $\mathbb{R}$ - reálná čísla, ② posloupnosti a řady, ③ funkce jedné proměnné.

---

① Reálná čísla $\mathbb{R}$

geometricky: … —— 0 —— …

aritmeticky: (nekonečné) desetinné rozvoje, jako

$\frac{5}{3} = 1.666\ldots$, $-\pi = -3.1415926\ldots$, 12.0375, …

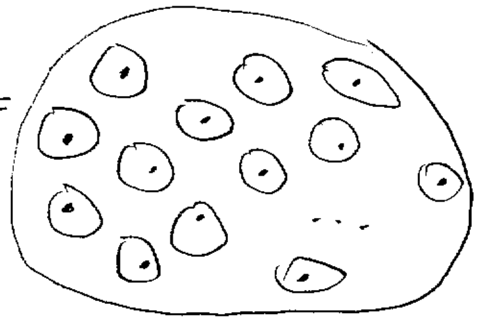
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - celá čísla

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ - racionální čísla čili zlomky

$\mathbb{Q}$ jsou rodinky ekvivalentních zlomků, $\frac{-50}{30} = \frac{10}{-6} = \frac{55}{-33} = \frac{-5}{3} = \ldots$,

zlomek v základním tvaru

$\mathbb{Q} =$ 

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ "}\subset\text{" } \mathbb{Q} \text{ "}\subset\text{" } \mathbb{R}$

$z \in \mathbb{Z}$ chápeme jako $\frac{z}{1}$

$\frac{a}{b}$ chápeme jako periodický des. rozvoj, např. $\frac{1}{30} = 0.03333\ldots$

Obvyklé sčítání $+$, násobení $\cdot$ a uspořádání $<$ na $\mathbb{Q}$:

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$:

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ - <u>asociativita</u>

$\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$ - <u>komutativita</u>

$\alpha(\beta+\gamma) = (\alpha\beta)+(\alpha\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ - <u>distributivita</u>

$\exists$ prvky $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Q}$, že $\bar{0} \neq \bar{1}$ a pro $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ platí, že

$\alpha+\bar{0} = \alpha$, $\alpha\,\bar{1} = \alpha$ - <u>neutrální prvky</u>

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq \bar{0}$, $\exists$ prvky $-\alpha, \beta^{-1} \in \mathbb{Q}$, že platí

$\alpha+(-\alpha) = \bar{0}$, $\beta \cdot \beta^{-1} = \bar{1}$ - <u>inverzní prvky</u>

Obecně a abstraktně, $(T,+,\cdot)$ (množina se dvěma binárními operacemi) splňující vše toto ↑ je <u>těleso.</u>

V $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ můžeme vzít $\bar{0} = \frac{0}{1} = 0$, $\bar{1} = \frac{1}{1} = 1$ a, pro $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$, $-\alpha = \frac{-a}{b}$, $\beta^{-1} = \frac{d}{c}$.

Úloha 1 V tělese jsou neutrální a inverzní prvky jednoznačně určené.

Úloha 2 Uveďte příklad konečného tělesa.

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$: $\alpha < \beta$ & $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ - <u>tranzitivita</u>

: platí právě jedno z $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$

- <u>trichotomie</u>

Obecně a abstraktně, $(X, <)$ (množina s binární relací) splňující tyto dva axiomy je <u>lineární uspořádání</u>.

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$ - <u>monotonie sčítání</u>

: $\alpha < \beta, \gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ - <u>monotonie násobení</u>

Obecně a abstraktně, $(T, +, \cdot, <)$ (množina se dvěma binárními operacemi a binární relací) splňující všechny předchozí axiomy je <u>uspořádané těleso</u>.

Úloha 3 V usp. tělese platí, že $0 < 1$, $x^2 = x \cdot x \geq 0$

a každé usp. těleso je nekonečné. $\geq$: > nebo =

Věta - shrnutí $\mathbb{Q}$ s obvyklým $+, \cdot$ a $<$ je usp. těleso

Rovněž $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je usp. těleso, které rozšiřuje $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$. $\mathbb{R}$ má oproti $\mathbb{Q}$ navíc dvě věci: <u>nespočetnost</u> a <u>úplnost</u>.

<u>Nespočetnost $\mathbb{R}$</u> Řekneme, že množina X je

- <u>nejvýše spočetná</u>, když existuje posloupnost $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, že $a_n \in X$ pro každé n a, naopak, pro každé $x \in X$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $a_n = x$.

Posloupnost A tedy „vyčerpává" množinu X.

- **spočetná**, když je X nekonečná a nejvýše spočetná.
- **nespočetná**, když X není nejvýše spočetná.

Nespočetná množina je tedy nekonečná a nelze ji vyčerpat žádnou posloupností.

Příklady. Každá konečná množina je nejvýše spočetná. Spočetná množina je nejvýše spočetná. $\mathbb{Z}$ je spočetná, vyčerpává ji posloupnost $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$.
$\mathbb{Q}$ je též spočetná (bereme jen zlomky v zákl. tvaru):
$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, \frac{9}{1}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{7}, \frac{-7}{3}, \frac{-9}{1}, \ldots)$.
$X \subset Y$, Y nejvýše spočetná $\Rightarrow$ X nejvýše spočetná.

Úloha 4 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ buďte nejvýše spočetné množiny. Ukažte, že množiny $X_1 \cup X_2$, $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ a dokonce $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots$ jsou nejvýše spočetné.

Existují nespočetné množiny?

Věta (G. Cantor, 1873) Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

D. $\mathbb{R} = \{\pm$ desetinné rozvoje$\}$. Ukážeme, že už množina $X = \{0.a_1 a_2 a_3 \ldots \mid a_i = 1 \text{ nebo } 2\}$ (za des. tečkou jsou jen jedničky a dvojky) je nespočetná. Tím spíše celá $\mathbb{R}$. Nechť $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ je libovolná posloupnost se členy v X, tj. $p_n \in X$ pro každé n.

Vyrobíme takové číslo $x \in X$, že $x \neq p_n$ pro každé n. Tím ukážeme, že žádná posloupnost P nevyčerpává X. Nechť například

$$p_1 = 0.\,1\,2\,2\,2\,1\,1\,1\ldots$$
$$p_2 = 0.\,2\,2\,2\,1\,1\,2\,2\ldots$$
$$p_3 = 0.\,1\,2\,1\,2\,1\,2\,2\ldots$$
$$p_4 = 0.\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots$$
$$p_5 = 0.\,2\,2\,2\,1\,2\,2\,2\ldots$$
$$\vdots$$

diagonální cifry

Číslo x definujeme jako $x = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots$, kde d_n je změněná n-tá cifra čísla p_n za des. tečkou. „Změněná" znamená výměnu $1 \leftrightarrow 2$. V našem příkladu číslo x bude $x = 0.21221\ldots$. Je jasné, že $x \in X$. Rovněž $x \neq p_n$ pro každé n, protože čísla x a p_n se liší přinejmenším v n-té cifře za des. tečkou (viz ještě poznámku níže).

konec důkazu $\boxtimes$

Předchozímu postupu, konstrukci x pomocí diagonálních cifer členů posloupnosti P, se říká <u>diagonalizace</u> (<u>diagonální argument</u>).

<u>Poznámka.</u> Reálná čísla a des. rozvoje si jednoznačně odpovídají, s výjimkou synonymních rozvojů jako $0.7299999\ldots = 0.730000\ldots$ (což píšeme jako 0.73), kdy má reálné číslo dva formálně různé des. rozvoje. Tomu jsme se v důkazu vyhnuli, rozvoje

Končící …000… a …999… jsme vůbec nedovolili (ještě jeden případ synonymních rozvojů: $+0.000\ldots = -0.000\ldots$)

Úloha 5 Důkaz Cantorovy věty fakticky dokazuje, že množina $P(\mathbb{N}) = \{X \mid X \subset \mathbb{N}\}$ (množina všech podmnožin množiny přiv. čísel) je též nespočetná. Jak?

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \underset{\text{znaménko}}{z}\underset{\text{cifry}}{a}$, kde $z \in \{+,-\}$, $a : \mathbb{Z} \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ a začíná nekonečně mnoha nulami. Např. pro

$\alpha = -3.1415926\ldots$ je $z = -$, $a(n) = 0$ pro $n > 0$,

$\alpha = za = -0000031415\ldots$ $\{a(0) = 3, a(-1) = 1, a(-2) = 4, \ldots$

Reálné číslo $\alpha = za$ je <u>algoritmicky vyčíslitelné</u>, když existuje <u>algoritmus</u> (tj. počítačový program) se vstupy v $\mathbb{Z}$ a výstupy v $\{0,1,\ldots,9\}$, který pro vstup $n \in \mathbb{Z}$ jako výstup vypočte $a(n)$, tj. cifru čísla α s řádem 10^n. Nechť

<u>$\mathbb{V} = \{$alg. vyčíslitelná reálná čísla$\}$</u>

<u>Příklady</u> $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$, $\frac{1}{9} = 0.1111\ldots$, $-\pi = -3.1415926\ldots$ apod. patří do $\mathbb{V}$, jsou to alg. vyčíslitelná reálná čísla. Též $\mathbb{Q} \subset \mathbb{V}$.

Existují reálná čísla, která se nedají alg. vyčíslit? Skoro všechna jsou taková! – to plyne z C. věty

Tvrzení Množina $\mathbb{V}$ je spočetná

D. Protože množina algoritmů, tj. počítačových programů, je spočetná. Programy, napsané v nějakém progr. jazyce, můžeme ztotožnit se slovy nad nějakou konečnou abecedou A. Není těžké vidět, že množina všech slov $A^* = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in A\}$ nad konečnou abecedou A je spočetná. $\boxtimes$

Důsledek (Cantorovy věty) Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{V}$ alg. nevyčíslitelných reálných čísel je nespočetná.

D. Kdyby $\mathbb{R} \setminus \mathbb{V}$ byla nejvýše spočetná, byla by nejvýše spočetná i $\mathbb{R} = \underset{\le \text{spoč.}}{\mathbb{V}} \cup \underset{\le \text{spoč.}?}{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{V})}$, což podle Cantorovy věty není. $\boxtimes$

Závěr. Množiny $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{V}$ jsou jen nepatrné příměsí Oceánu $\mathbb{R}$. Reálného čísla se nelze téměř nikdy algoritmicky dotknout.