13. přednáška 7. ledna 2008

FSŘ lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Je to rovnice

$$R(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_i \in \mathbf{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$ a $y = y(x)$ je neznámá funkce s definičním intervalem $I = \mathbf{R}$. *Charakteristický polynom* této rovnice je

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Jako $K(p) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid p(\lambda) = 0\}$ označíme množinu jeho kořenů a pro kořen λ symbolem $n(\lambda) \in \mathbf{N}$ označíme jeho násobnost. Definujeme dvě množiny funkcí:

$$\mathcal{F}(R, \mathbf{C}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p), 0 \leq k < n(\lambda)\}$$

a

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(R, \mathbf{R}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p) \cap \mathbf{R}, 0 \leq k < n(\lambda)\} \\ &\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x) \mid \lambda + \mu i \in K(p), \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu > 0, 0 \leq k < n(\lambda + \mu i)\} \\ &\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x) \mid \mathrm{dtto}\}. \end{aligned}$$

Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ obsahují komplexní exponenciálu a jsou to obecně komplexní funkce reálné proměnné. Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou reálné. Seznam $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ vznikl z $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ náhradou dvojic komplexních funkcí

$$x^k \mathrm{e}^{(\lambda + \mu i)x},\ x^k \mathrm{e}^{(\lambda - \mu i)x}$$

(nereálné kořeny p se vyskytují ve dvojicích $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ komplexně sdružených kořenů se stejnými násobnostmi—úloha 1) dvojicemi reálných funkcí

$$x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x),\ x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x).$$

V obou množinách je n různých funkcí, $|\mathcal{F}(R, \mathbf{C})| = |\mathcal{F}(R, \mathbf{R})| = n$ (úloha 2). Dokážeme, že funkce v obou množinách jsou řešení rovnice $R(y) = 0$ a tvoří lineárně nezávislé n-tice, $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou tedy její FSŘ.

Tvrzení 3.7. *Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou řešení rovnice $R(y) = 0$.*

Důkaz. Protože $(\mathrm{e}^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda x}$, pro každý kořen $\lambda \in K(p)$ (p je charakteristický polynom rovnice $R(y) = 0$) máme $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \mathrm{e}^{\lambda x} p(\lambda) = 0$ a $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením. Abychom vyrobili další řešení, uvažme "derivovanou" rovnici řádu $n - 1$

$$R'(y) = n a_n y^{(n-1)} + \cdots + 2a_2 y' + a_1 y = 0.$$

Její charakteristický polynom je $p'(x)$, derivace charakteristického polynomu původní rovnice. Podobně definujeme rovnici $R''(y) = 0$ atd. Nechť $f = f(x)$ je funkce a $R(f) = R'(f) = 0$. Díky $(xf)^{(m)} = mf^{(m-1)} + xf^{(m)}$ máme

$$R(xf) = R'(f) + xR(f) = 0.$$

Takže

$$R(f) = R'(f) = 0 \Rightarrow R(xf) = 0.$$

Má-li kořen $\lambda \in K(p)$ násobnost $m = n(\lambda)$, je $\mathrm{e}^{\lambda x}$ řešením všech rovnic $R(y) = 0, R'(y) = 0, \ldots, R^{(m-1)}(y) = 0$, protože λ je kořenem všech jejich charakteristických polynomů $p, p', \ldots, p^{(m-1)}$. Opakovaným užitím právě dokázané implikace dostáváme, že $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = R(x\mathrm{e}^{\lambda x}) = \cdots = R(x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}) = 0$. Tím jsme dokázali, že každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$.

Pro dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ v $K(p)$, $\mu > 0$, si označíme funkce v odpovídajících dvojicích v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jako

$$f_1 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda+\mu i)x}, f_2 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda-\mu i)x} \quad \text{a} \quad g_1 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x), g_2 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x).$$

Díky $\mathrm{e}^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ máme

$$g_2 = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{a} \quad g_1 = \frac{f_1 - f_2}{2i}.$$

Protože je množina řešení rovnice $R(y) = 0$ uzavřená na lineární kombinace, z $R(f_1) = R(f_2) = 0$ plyne i $R(g_1) = R(g_2) = 0$. Pro reálný kořen $\lambda \in K(p)$ je odpovídající funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ stejná. Dokázali jsme, že i každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je řešení rovnice $R(y) = 0$. $\square$

Věta 3.8. *Množiny funkcí $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou FSŘ rovnice $R(y) = 0$.*

Důkaz. Víme, že to jsou řešení—zbývá ukázat, že obě n-tice funkcí jsou lineárně nezávislé. Dokážeme to jen pro $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$. Lineární nezávislost $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ pak plyne z toho, že $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ vznikla z $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ lineárními úpravami zachovávajícími lineární nezávislost (úloha 3). Ukážeme obecněji, že každá r-tice různých funkcí $f_1, \ldots, f_r$ z množiny

$$\mathcal{F} = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid k \in \mathbf{N}_0, \lambda \in \mathbf{C}\}$$

je lineárně nezávislá nad $\mathbf{R}$.

V lineární kombinaci

$$a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r,$$

kde $f_i \in \mathcal{F}$ jsou vzájemně různé funkce (tj. odpovídající různým dvojicím parametrů k, λ) a a_i jsou nenulové reálné (či komplexní, to je jedno) koeficienty, dáme k sobě stejné exponenciály a upravíme ji tak na tvar

$$T(x) = p_1(x) e^{\lambda_1 x} + \ldots + p_s(x) e^{\lambda_s x},$$

kde $s \geq 1$ (zřejmě $s \leq r$), λ_i jsou vzájemně různá komplexní čísla a $p_i(x)$ jsou nenulové polynomy. Dokážeme, že žádná funkce $T(x)$ tohoto typu není identicky nulová. Je to jasné pro $s = 1$, protože $p_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = 0$ jen když $x \in \mathbf{C}$ je kořen polynomu $p_1(x)$. Předpokládejme pro spor, že $T(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbf{C}$ pro nějakou funkci $T(x)$. Vezmeme takovou funkci $T_0(x)$ s nejmenší délkou s, nutně $s \geq 2$, a jako d označíme stupeň polynomu $p_1(x)$ v $T_0(x)$. Pak

$$\begin{aligned} T_1(x) &:= \left(\frac{T_0(x)}{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}\right)^{(d+1)} \\ &= \Big(p_1(x) + p_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \ldots + p_s(x)e^{(\lambda_s-\lambda_1)x}\Big)^{(d+1)} \\ &= q_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \ldots + q_s(x)e^{(\lambda_s-\lambda_1)x} \end{aligned}$$

pro nějaké nenulové polynomy $q_i(x)$. To vyplývá z rovnosti

$$\big(p(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\big)' = (p'(x) + \lambda p(x))\mathrm{e}^{\lambda x} = q(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

kde pro $\lambda \neq 0$ polynomy $p(x)$ a $q(x)$ mají stejný stupeň. Takže $T_1(x)$ je kratší funkce daného typu. Ale také $T_1(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbf{C}$. Máme spor s minimalitou s. $\square$

Úlohy

1. Proč se nereálné kořeny charakteristického polynomu vyskytují v komplexně sdružených dvojicích se stejnými násobnostmi?
2. Ukažte, že opravdu $|\mathcal{F}(R,\mathbf{C})| = |\mathcal{F}(R,\mathbf{R})| = n$, to jest nestane se, aby dvě různé dvojice resp. trojice parametrů dávaly stejnou funkci.
3. Ukažte podrobně, jak z lineární nezávislosti $\mathcal{F}(R,\mathbf{C})$ plyne lineární nezávislost $\mathcal{F}(R,\mathbf{R})$.
4. Popište komplexní a reálný FSŘ rovnice $y^{(4)} + 2y''' - y'' + 2y' + y = 0$.