Přednáška 11, 11. prosince 2019

Kapitola 3: úvod do komplexní analýzy. Holomorfní a analytické funkce. Čtyři odlišnosti. Integrál

Komplexní čísla. Ve zbývajících třech přednáškách dokážeme (ve větě 1 níže): má-li funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ všude derivaci, je součtem mocninné řady — existují komplexní koeficienty $a_0, a_1, \ldots$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$.

Komplexní čísla

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a,\, b \in \mathbb{R}\},\ i = \sqrt{-1}\ ,$$

tvoří normované těleso $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\ldots|)$ (viz přednáška 2). Má operace

$$\begin{aligned}(a+bi) + (c+di) &= (a+c) + (b+d)i\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i\end{aligned}$$

a normu $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, označovanou jen absolutní hodnotou (úloha 1). Je to metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$ s metrikou $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ a je *úplný*.[1] Symboly $U, U', U_1, \ldots$ označují neprázdné otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$ a z označuje komplexní proměnnou. Připomínáme značení

$$\mathrm{re}(a+bi) = a \ \text{ a } \ \mathrm{im}(a+bi) = b$$

pro reálnou a imaginární část komplexního čísla $a + bi$ a $B(z, r) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z| < r\}$ pro kouli se středem z a poloměrem $r > 0$.

Holomorfní a analytické funkce. Pro funkci $f\colon U \to \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je *derivace $f'(z_0)$ funkce f v bodě z_0* definovaná jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}\ ,$$

pokud tato limita existuje. Explicitně, $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace f v z_0, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ z \in U \ \&\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\ .$$

[1] Úplnost $\mathbb{C}$ budeme potřebovat nejpozději v příští přednášce pro důkaz Cauchyovy–Goursatovy věty.

Definice (holomorfní funkce). *Funkce* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *je* holomorfní (na U), *má-li v každém bodu* $z_0 \in U$ *derivaci.*

Celá či *celistvá funkce* je funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Algebraické vlastnosti komplexních derivací se shodují s reálným případem a shrnujeme je v následujícím tvrzení, jehož důkaz přenecháváme čtenářce či čtenáři jako úlohy 2–4.

Tvrzení (vlastnosti derivací). *Nechť* $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ *a* $h\colon U' \to \mathbb{C}$ *jsou holomorfní funkce a* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *jsou čísla.*

1. *(linearita) Lineární kombinace* $\alpha f + \beta g$ *je holomorfní a* $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
2. *(Leibnizovo pravidlo) Součin* fg *je holomorfní a* $(fg)' = f'g + fg'$.
3. *(derivace podílu) Když* $g \neq 0$ *na* U*, podíl* $\frac{f}{g}$ *je holomorfní a* $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. *(derivace složené funkce) Když* $h(U') \subset U$*, složená funkce* $f(h)\colon U' \to \mathbb{C}$ *je holomorfní a* $(f(h))' = f'(h)h'$.

Samozřejmě, $z' = 1$ a $c' = 0$ pro každou konstantu $c \in \mathbb{C}$. Tedy každá racionální funkce, což je podíl $\frac{p(z)}{q(z)}$ dvou polynomů, je holomorfní na svém definičním oboru a má tutéž derivaci jako v reálném případu.

Definice (analytické funkce). *Funkce* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *je* analytická (na U), *pokud pro každý bod* $z_0 \in U$ *existují taková čísla* $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$*, že*

$$z \in U \ \&\ B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Analytická funkce je tedy v každém kruhu se středem z_0 a obsaženém v definičním oboru vyjádřena mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0. S komplexními mocninnými řadami počítáme jako s reálnými (viz předminulá a minulá přednáška). Je jasné (úloha 5), že každá analytická funkce je holomorfní. Hlubokým výsledkem komplexní analýzy je opačná implikace: obě výše definované třídy funkcí splývají.

Čtyři odlišnosti reálné a komplexní analýzy. Uvedeme, v čem se analýza v komplexním oboru liší od analýzy reálné.

Věta 1 (holomorfní $\Rightarrow$ analytická). *Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá, pak existují komplexní koeficienty $a_0, a_1, \ldots$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dokážeme to pro jednoduchost jen pro celé funkce, ale platí již zmíněná obecná verze: je-li $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfní, je f analytická. Okamžitý důsledek je, že celá (či obecněji holomorfní) funkce má derivace všech řádů.

Jak víme, a to je *první odlišnost*, v reálném oboru věta 1 neplatí. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x \ge 0$ má na $\mathbb{R}$ derivaci $f'(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f'(x) = 2x$ pro $x \ge 0$, ale není na žádném okolí nuly $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, součtem mocninné řady, protože $f''(0)$ neexistuje.

Během zbývajících třech přednášek také dokážeme následující výsledek.

Věta 2 (J. Liouville, 1847). *Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá a omezená funkce, je f konstantní.*

V reálném oboru to zdaleka neplatí a máme *druhou odlišnost.* Funkce jako $\sin x$, $\cos x$ nebo e^{-x^2} jdou z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, mají derivace všech řádů a jsou omezené, ale zdaleka nejsou konstantní (úlohy 6 a 7). Věta pochází od francouzského matematika *Josepha Liouvillea (1809–1882).*

Důsledek (Základní věta algebry). *Je-li $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ takový polynom s komplexními koeficienty, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $p(z) \ne 0$, je $p(z)$ konstantní nenulový polynom.*

Důkaz. Nechť $p(z)$ je popsaný polynom. Podle úlohy 8 existuje $z_0 \in \mathbb{C}$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $|p(z)| \ge |p(z_0)| > 0$ — $|p|$ nabývá na $\mathbb{C}$ minimum. Reciproká funkce $1/p(z)$ je tedy všude definovaná a omezená, $|1/p(z)| \le 1/|p(z_0)|$. Je též celá:

$$\left(\frac{1}{p(z)}\right)' = \frac{-p'(z)}{p(z)^2}\ .$$

Podle předchozí věty je $1/p(z)$ konstantní, a tak i $p(z)$ je konstantní. $\square$

Třetí odlišnost reálné a komplexní analýzy se týká spojitosti derivace. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pro $x \ne 0$ a $f(0) = 0$ má všude derivaci, ta je ale nespojitá v $x = 0$ (úloha 9). Žádná taková celá funkce neexistuje.

Věta 3 (spojitost komplexní derivace). *Má-li* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *derivaci* $f'\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *je* f' *spojitá.*

To ovšem okamžitě plyne z věty 1 a platí to samozřejmě obecněji i pro holomorfní funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ (úloha 14).

Čtvrtá odlišnost analýzy v $\mathbb{R}$ a analýzy v $\mathbb{C}$ se týká lokálních maxim $|f|$. Funkce $f(x) = 1 - x^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů, je to dokonce polynom, a má vlastnost, že $|f|$ nabývá v $x = 0$ ostré lokální maximum: $x \in (-1, 1), x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| = 1 - x^2 < 1 = |f(0)|$. Žádná taková holomorfní funkce neexistuje.

Věta 4 (princip maxima modulu). *Nechť* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall\, a \in U\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, b \in U:\ 0 < |b - a| < \delta\ \&\ |f(b)| \geq |f(a)|\ .$$

Pro žádnou holomorfní funkci f tedy $|f|$ nemá žádné ostré lokální maximum. Tuto větu nedokážeme, ale během zbývajících třech přednášek dokážeme všechny věty 1–3.

Úsečky a obdélníky. Pro to potřebujeme integrál přes úsečku a přes hranici obdélníka. Definujme tyto geometrické objekty. Pro dva různé body $a, b \in \mathbb{C}$ je *úsečka* $u = ab \subset \mathbb{C}$ obraz

$$u = ab = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

intervalu $[0, 1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) = (b - a)t + a\colon [0,\, 1] \to \mathbb{C}\ .$$

Je orientovaná pořadím svých konců, takže $ab \neq ba$ jsou dvě různé úsečky. Má *délku* $|u| = |ab| = |b - a| \geq 0$. *Dělení* p úsečky $u = ab$ je $k + 1$-tice $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset u$, $k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i = \varphi(t_i),\ i = 0, 1 \ldots, k\ ,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ dělení intervalu $[0, 1]$. Takže $a_0 = a$, $a_k = b$ a body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ běží na u od a do b. *Norma* $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \le i \le k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \le i \le k} |a_i - a_{i-1}| \ ,$$

největší délka podúsečky v p. Patrně (úloha 10)

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{i-1}a_i| = \sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| = |a_k - a_0| = |b - a| = |ab| = |u| \ .$$

Pro funkci $f\colon u \to \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky u definujeme *Cauchyovu sumu* $C(f, p)$ a její *modifikaci* $C'(f, p)$ jako

$$\begin{aligned} C(f,\, p) \ &:= \ \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C} \ \text{ a} \\ C'(f,\, p) \ &:= \ \sum_{i=1}^{k} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C} \ . \end{aligned}$$

Připomínají riemannovské sumy z definice Riemannova integrálu. Patrně (úloha 11)

$$|C(f, p)| = \left| \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \right| \le \sup_{z \in u} |f(z)| \cdot |u|$$

a totéž platí pro $C'(f, p)$. Modifikaci $C'(f, p)$ použijeme v důkazu toho, že obrácení úsečky mění znaménko integrálu.

Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \mathrm{re}(z) \le \beta \ \& \ \gamma \le \mathrm{im}(z) \le \delta\}$$

daná reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou či imaginární osou. Pro $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ jde o *čtverec*. *Kanonické vrcholy obdélníka* R jsou $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a = \alpha + \gamma i, \ b = \beta + \gamma i, \ c = \beta + \delta i \ \text{ a } \ d = \alpha + \delta i \ .$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček. *Hranice* ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R = ab \cup bc \cup cd \cup da \ .$$

Název souhlasí s pojmem hraničního bodu v metrickém prostoru. *Vnitřek* int(R) obdélníka R je

$$\mathrm{int}(R) = R \setminus \partial R\ ,$$

opět v souladu s pojmem vnitřního bodu v metrickém prostoru. *Obvod* obv(R) *obdélníka* R je součet délek stran,

$$\mathrm{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|\ .$$

Integrace je klíčový pojem důkazu. Naše definice se poněkud liší od učebnicového křivkového integrálu, přizpůsobili jsme ji pro co nejpřímočařejší důkaz vět 1–3.

Definice ($\int$). *Nechť* $f\colon u, \partial R \to \mathbb{C}$ *je spojitá funkce definovaná na úsečce* u *nebo na hranici obdélníka* R. *Definujeme*

$$\int_u f := \lim_{n\to\infty} C(f,\, p_n) \in \mathbb{C} \quad a \quad \int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f \in \mathbb{C}\ .$$

Zde (p_n) *je libovolná posloupnost dělení* p_n *úsečky* u *s* $\lim \|p_n\| = 0$ *a* (a, b, c, d) *jsou kanonické vrcholy* R. *Hodnota* $\int_u f$ *je* integrál f přes úsečku u *a* $\int_{\partial R} f$ *je* integrál f přes hranici ∂R.

Spojitost funkce f zaručuje existenci $\int_u f$ a tedy i $\int_{\partial R} f$. Nyní ji dokážeme.

Věta (vlastnosti $\int$). *Nechť* $u = ab$, R *a funkce* f, g *jsou jako v definici. Limita definující* $\int_u$ *vždy existuje a nezávisí na posloupnosti* (p_n). *Tedy i* $\int_{\partial R}$ *je vždy definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.*

1. *Linearita: pro každé* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *je*

$$\int_u (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$$

   a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.

2. *ML*[2] *odhady — zkratka znamená maximum modulu funkce krát délka (length) integrační dráhy —*

$$\left|\int_u f\right| \le \max_{z\in u} |f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left|\int_{\partial R} f\right| \le \max_{z\in\partial R} |f(z)| \cdot \mathrm{obv}(R)$$

   ($\max |f(z)|$ *existují díky spojitosti* f *a kompaktnosti* u *a* ∂R).

[2] Což neznamená marxismus–leninismus (smích).

3. Aditivita: pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je

$$\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f \ . \ \textit{Dále} \ \int_{ba} f = -\int_{ab} f \ .$$

Důkaz. Nechť[3] $f\colon u \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Stačí dokázat (úloha 12), že $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, že pro každá dvě dělení p a q úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$ je

$$|C(f,\, p) - C(f,\, q)| < \varepsilon \ .$$

Tato Cauchyova podmínka pro p a q plyne ze stejnoměrné spojitosti f, jež vyplývá ze spojitosti f a z kompaktnosti u. Pro důkaz podmínky tak nejprve pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta > 0$, že

$$x,\, y \in u,\, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|u|} \ .$$

Nechť $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ a $q = (b_0, b_1, \ldots, b_l)$ jsou dvě dělení úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$, kde navíc předpokládáme, že p zjemňuje q: $b_j = a_{i_j}$, $j = 0, 1, \ldots, l$, pro nějaké indexy $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_l = k$. Pak

$$C(f,\, p) = \sum_{j=1}^{l} C(f,\, p_j) \ ,$$

kde $p_j = (a_{i_{j-1}}, a_{i_{j-1}+1}, \ldots, a_{i_j})$ je dělení úsečky $u_j = a_{i_{j-1}} a_{i_j} = b_{j-1} b_j$, a

$$C(f,\, q) = \sum_{j=1}^{l} C(g_j,\, p_j) \ ,$$

kde $g_j\colon u_j \to \mathbb{C}$ označuje funkci, která má na u_j konstantní hodnotu $f(a_{i_j}) = f(b_j)$ (úloha 13). Podle trojúhelníkové nerovnosti, definice Cauchyovy sumy,

[3] Tento důkaz jsem na přednášce vynechal.

definice funkce g_j, volby dělení p a q a úlohy 10,

$$\begin{aligned}
|C(f,\,q)-C(f,\,p)| &\le \sum_{j=1}^{l}|C(g_j,\,p_j)-C(f,\,p_j)|\\
&= \sum_{j=1}^{l}\Big|\sum_{m=a_{i_{j-1}}+1}^{a_{i_j}}(f(a_{i_j})-f(a_m))\cdot(a_m-a_{m-1})\Big|\\
&< \sum_{j=1}^{l}\sum_{m=a_{i_{j-1}+1}}^{a_{i_j}}\frac{\varepsilon}{|u|}|a_m-a_{m-1}| = \sum_{j=1}^{l}\frac{\varepsilon}{|u|}|b_j-b_{j-1}|\\
&= \frac{\varepsilon}{|u|}|u| = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

V obecném případu užijeme trik společného zjemnění. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta > 0$, jehož existenci jsme dokázali v předchozím odstavci, že pro každá dvě dělení p' a q' úsečky u, že $\|p'\|, \|q'\| < \delta$ a jedno z nich zjemňuje druhé, je $|C(f,p') - C(f,q')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jsou-li nyní p a q dvě libovolná dělení úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$, vezmeme jejich společné zjemnění, dělení $r = p \cup q$. To zjemňuje p i q a splňuje $\|r\| < \delta$. Podle definice δ máme kýženou nerovnost

$$|C(f,p) - C(f,q)| \le |C(f,p) - C(f,r)| + |C(f,r) - C(f,q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Tím je dokázána existence integrálů $\int_u f$ a $\int_{\partial R} f$.

Důkazy vlastností 1–3 limitním přechodem $n \to \infty$ jsou snadné. Linearita plyne z linearity Cauchyových sum $C(\cdot, p_n)$ v první proměnné. První ML odhad plyne z odhadu Cauchyových sum v úloze 11 a druhý plyne z prvního. První identita v aditivitě plyne z aditivity Cauchyovy sumy v druhé proměnné: $C(f,p) = C(f,q) + C(f,r)$, když q a r jsou po řadě dělení úseček ac a cb a $p = qr$ je spojené dělení úsečky ab, $\|p\| = \max(\|q\|, \|r\|)$. Konečně druhá identita plyne z faktu, že $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, že pro každé dělení p úsečky u s $\|p\| < \delta$ je $|C(f,p) - C'(f,p)| < \varepsilon$ (důsledek stejnoměrné spojitosti f), a z toho, že pro každé dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky ba se

$$C(f,\,p) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_i - a_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_{i-1} - a_i) = -C'(f,\,p')\ ,$$

kde $p' = (a_0', a_1', \ldots, a_k') = (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0)$ je dělení úsečky ab vzniklé z p obrácením úsečky ba. Samozřejmě $\|p\| = \|p'\|$. $\square$

Úlohy

1. Dokažte, že $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\dots|)$ je úplné normované těleso.

2. Dokažte linearitu derivace a Leibnizovo pravidlo.

3. Dokažte vzorec pro derivaci podílu.

4. Dokažte vzorec pro derivaci složené funkce.

5. Dokažte, že analytická funkce má derivace všech řádů.

6. Uveďte nekonečně mnoho reálných, všude definovaných, libovolně diferencovatelných, omezených, avšak nekonstantních funkcí.

7. Dokažte, že pro každou k-tici dvojic $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, k$, existuje reálná, všude definovaná, libovolně diferencovatelná a omezená funkce f splňující $f(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

8. Dokažte, že pro každý komplexní polynom $p(z)$ funkce $|p(z)|$ nabývá na $\mathbb{C}$ minimum.

9. Spočítejte derivaci funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané jako $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. Ukažte, že f' je nespojitá v 0.

10. Dokažte, že součet délek podúseček dělení úsečky u je její délka $|u|$.

11. Dokažte, že absolutní hodnota Cauchyovy sumy je nejvýše supremum absolutních hodnot z hodnot funkce na dané úsečce krát délka úsečky.

12. Ukažte, že když platí Cauchyova podmínka pro p a q, pak limita definující $\int_u$ existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n).

13. Vysvětlete identitu $C(f,\, q) = \sum_{j=1}^{l} C(g_j,\, p_j)$ v posledním důkazu.

14. Odvoďte větu 3 z věty 1.