11. přednáška 10. prosince 2007

Kapitola 3. Úvod do teorie diferenciálních rovnic.

Obyčejná diferenciální rovnice řádu n (ODR řádu n) je vztah

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

mezi argumentem x funkce jedné proměnné y, její hodnotou $y = y(x)$ v x a hodnotami jejích prvních n derivací $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ v x. Je zadaná funkcí s $n + 2$ proměnnými

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}).$$

Dvojice (I, y), kde $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a $y: I \to \mathbf{R}$ na něm definovaná funkce, je jejím *řešením*, když má y na I derivace až do řádu n a pro každé x z I leží $(n + 2)$-tice čísel $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ v definičním oboru funkce F a ta na ní nabývá nulovou hodnotu.

Přívlastek „obyčejný“ vymezuje, že neznámou v rovnici je funkce jedné proměnné. *Parciálními diferenciálními rovnicemi* (PDR), které mají jako neznámé funkce více proměnných a svazují hodnoty jejich parciálních derivací, se na této přednášce nebudeme zabývat. ODR, a ještě více PDR, jsou důležité jako matematické modely problémů z fyziky, techniky, biologie, ekonomie, ... Uvedeme dva příklady. V obou jako definiční interval I bereme celé $\mathbf{R}$.

Volný pád a radioaktivní rozpad. Newtonův zákon síly $ma = F$ (m je hmotnost, a zrychlení a F síla) se vyjadřuje diferenciální rovnicí

$$mx'' = F,$$

kde $x = x(t) \in \mathbf{R}$ je poloha částice o hmotnosti m v čase t (uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ) vystavené působení síly F. Hmotnost i sílu bereme jako konstanty, i když v mnoha situacích také závisejí na čase t (a/nebo poloze částice x a dalších parametrech). Nechť F představuje třeba působení tíhového pole Země, které je v jednoduchém modelu konstantní (nemění se s časem, nezávisí na poloze částice atd.). Pak máme *rovnici volného pádu*

$$mx'' = -mg$$

($g \approx 9.81$ je konstanta tíhového zrychlení). Záporné znaménko znamená, že tíhová síla je orientováná směrem do $-\infty$ reálné osy. Jejím řešením je každá funkce

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Ty vyjadřují skutečnost, že pohyb částice v tíhovém poli je úplně určen teprve zadáním její polohy $x(t_0)$ a rychlosti $x'(t_0)$ v nějakém okamžiku t_0. Například pro $t_0 = 0$, $x(0) = 0$ a $x'(0) = v > 0$ máme $c_1 = v$ a $c_2 = 0$. Funkce

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

pak popisuje pohyb hmotného bodu vrženého v čase $t_0 = 0$ z bodu 0 rychlostí v směrem vzhůru. (V čase $t_1 = 2v/g$, jenž je druhým řešení rovnice $x(t) = 0$ vedle $t_0 = 0$, částice znovu proletí bodem $x = 0$.)

Rovnice radioaktivního rozpadu

$$R' = -kR$$

popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t a $k > 0$ je materiálová konstanta. Tuto rovnici snadno odvodíme z fyzikálního předpokladu, že pro malé $\Delta > 0$ má každý atom v daném množství radioaktivního materiálu v každém okamžiku t_0 pravděpodobnost $k\Delta$, že se v náledující časovém intervalu $[t_0, t_0 + \Delta]$ rozpadne. Je jasné, že každá funkce

$$R(t) = c\exp(-kt),$$

kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

Dvě věty o existenci a jednoznačnosti řešení ODR prvního řádu. V předchozích dvou příkladech jsme uhádli řešení diferenciální rovnice, ale nebylo jasné, zda neexistují ještě jiná řešení. Uvedeme dvě obecné věty zaručující existenci a za silnějšího předpokladu i jednoznačnost řešení. Uvažme ODR 1. řádu s počáteční podmínkou, která je navíc vyřešená vhledem k derivaci:

$$(*)\left\{\begin{array}{lcl} y(a) & = & b \\ y'(x) & = & f(x, y(x)). \end{array}\right.$$

Předpokládáme, že rovnicová funkce f je spojitá na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Následující větu nebudeme dokazovat.

Věta 3.1 (Peanova). *Nechť $(a, b) \in \Omega$ a $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Potom existuje takové $\delta > 0$, že na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ má rovnice $(*)$ řešení $y(x)$.*

Pouhá spojitost rovnicové funkce však nezaručuje jednoznačnost řešení. Nechť $\Omega = \mathbf{R}^2$ a uvažme rovnici $y(0) = 0, y' = xy^{2/3}$ (zde $y^{2/3}$ bereme jako $(y^2)^{1/3}$, takže mocnina je definovaná pro každé $y \in \mathbf{R}$). V okolí 0, a vlastně na celém $\mathbf{R}$, má dvě řešení: $y_1(x) \equiv 0$ a $y_2(x) = x^6/6^3$. Obecněji, zvolíme-li $c > 0$, potom funkce $y(x)$ definovaná jako $(x^2 - c)^3/6^3$ pro $x \in \mathbf{R}\backslash(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ a jako 0 pro $x \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$ je řešením. Máme dokonce nekonečně mnoho řešení.

Řekneme, že funkce $f(x, y)$ je *lokálně lipschitzovská na množině Ω vzhledem k proměnné y*, když pro každý bod $a \in \Omega$ existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé dva body (x_0, y_1) a (x_0, y_2) z ε-ového okolí bodu a platí $|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| < K|y_1 - y_2|$. Lokální lipschitzovskost vyplývá například ze spojitosti parciální derivace $\partial_y f$ na Ω.

Věta 3.2 (Picardova). *Nechť $(a, b) \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ a f je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ má rovnice $(*)$ právě jedno řešení $y(x)$.*

Tuto větu jsme dokázali jako větu 1.11 na 4. přednášce. Pro rovnicovou funkci $f(x, y) = xy^{2/3}$ z předchozího příkladu tuto větu nelze pro bod $(0, 0)$ použít, f není v jeho okolí lipschitzovská vzhledem k y.

Lineární ODR prvního řádu. Vyřešíme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Zde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a, b: \ I \to \mathbf{R}$ jsou spojité na nějakém otevřeném intervalu I.

Řešení metodou integračního faktoru. Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. integrační faktor, že $c(y' + ay) = (cy)'$. Pak $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = \mathrm{e}^A$, kde $A = A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde D je primitivní funkce k cb a c_0 je integrační konstanta. Máme řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnuto,

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(\int \mathrm{e}^{A(x)} b(x) \, dx + c_0 \right), \quad \text{kde } A(x) = \int a(x) \, dx.$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I (definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá přesně jedna hodnota integrační konstanty c_0, pro níž je splněna. Zavedení integrační konstanty pro A, tj. nahrazení $A(x)$ obecnějším výrazem $A(x) + c_1$, už nedává obecnější řešení, které by se nedalo dostat jen s pomocí konstanty c_0.

Řešení metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $y' + ay = 0$. Odtud $y'/y = -a$ a $(\log y)' = -a$. Dostáváme $\log y = -A + c$ a $y = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{-A} = K\mathrm{e}^{-A}$, kde A je primitivní funkce k a a c a K jsou konstanty. Konstantu K v řešení $y(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$ homogenní rovnice nahradíme funkcí $K = K(x)$ a obecnou funkci $K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dosadíme do původní rovnice, čímž dostaneme podmínku na $K(x)$:

$$\begin{aligned} (K\mathrm{e}^{-A})' + a \cdot K\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K'\mathrm{e}^{-A} - Ka\mathrm{e}^{-A} + Ka\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K' &= b\mathrm{e}^{A}. \end{aligned}$$

Takže $K(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{A(x)} \, dx + c$ a po dosazení do $y(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dostáváme opět shora uvedený vzorec.

Příklad. Volný pád s odporem prostředí. Uvažujme částici o hmotnosti m, která z klidu padá vlivem konstantní tíže a na kterou kromě tíže působí i odpor prostředí. Předpokládejme, že síla odporu závisí lineárně na rychlosti částice—to je samozřejmě zjednodušení, ve skutečnosti je závislost složitější. Newtonův zákon síly dává pohybovou rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \text{tíže} - \text{odpor} = mg - kv,$$

kde $v = v(t)$ je rychlost částice v čase t, g je konstanta tíhového zrychlení a $k > 0$ je konstanta odporu prostředí. Máme lineární diferenciální rovnici

$$v' + av = b,$$

kde $a = k/m$ a $b = g$ jsou konstanty. Integrační faktor tedy je $c = \mathrm{e}^{kt/m}$ a podle hořejšího vzorce máme řešení

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c_1\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

Z počáteční podmínky $v(0) = 0$ vypočteme hodnotu integrační konstanty $c_1 = -mg/k$. Takže

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right).$$

Pro $t \to \infty$ se tedy rychlost částice blíží k limitní rychlosti

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}.$$

Tento vzorec plyne také uvážením rovnovážného stavu, kdy se tíže rovná síle odporu.

ODR prvního řádu se separovanými proměnnými. Je to diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I a $g \neq 0$ na I. Jedná se obecně o nelineární diferenciální rovnici, v níž na pravé straně můžeme od sebe oddělit—separovat—proměnné x a y.

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí funkce $G(t)$, jež je primitivní k funkci $1/g(t)$ na intervalu I, jako $G(y(x))' = f(x)$. Odtud dostáváme vztah $G(y(x)) = F(x) + c$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na I a c je integrační konstanta. Řešení původní diferenciální rovnice je tedy dáno jako implicitní funkce vztahem

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad \text{kde} \quad G(t) = \int \frac{dt}{g(t)} \quad \text{a} \quad F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Postup při řešení rovnice se separovanými proměnnými se obvykle zapisuje takto:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y) \\
g(y)^{-1}\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\
\int g(y)^{-1}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\
G(y) &= F(x) + c.
\end{aligned}$$

Dva důležité speciální případy jsou rovnice $y' = f(x)$ a $y' = g(y)$. Řešení první z nich jsou právě funkce primitivní k $f(x)$ na I. Řešení rovnice $y' = g(y)$ je dáno implicitně jako $G(y(x)) = x + c$ a je to tedy funkce inverzní ke $G(x) + c$:

$$y(x) = \left(\int \frac{dx}{g(x)} + c\right)^{\langle -1\rangle}.$$

Úlohy

1. (budou doplněny)