Jméno a příjmení:

Zkouška z Matematické analýzy III, 30. ledna 2018 (90 minut)

1. (6 bodů) Popište hraniční body množiny X v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$,

$$X = \{((-1)^n n, \tfrac{\log n}{n}) \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

   Odpověď zdůvodněte.

2. (6 bodů)

   (a) Definujte trigonometrickou řadu, Fourierovy koeficienty funkce a Fourierovu řadu funkce.

   (b) Ano nebo ne: Když $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a 2π-periodická funkce a (a_n) je posloupnost jejích cosinových Fourierových koeficientů, potom je posloupnost (a_n) omezená.

   (c) Ano nebo ne: Jsou-li $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvě spojité a 2π-periodické funkce, potom je n-tý sinový F. koeficient součinové funkce fg roven součinu n-tého sinového F. koeficientu funkce f a n-tého sinového F. koeficientu funkce g.

   Odpovědi zdůvodněte.

3. (6 bodů)

   (a) Uveďte (bez důkazů) vlastnosti otevřených a uzavřených množin v metrickém prostoru a topologickou charakterizaci spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory.

   (b) Nechť $M_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ a $M_2 = \mathbb{R}$ jsou euklidovské metrické prostory (M_1 s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}$) a $f: M_1 \to M_2$ je zobrazení dané vzorcem $f(x) = \frac{1}{x}$. Je f spojité na M_1?

   Odpověď zdůvodněte.

4. (6 bodů) Zformulujte a dokažte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí.