MATEMATICKÁ ANALÝZA II

(učebnice — předběžná verze, červen 2019)

Martin Klazar

Obsah

Předmluva

Tato učebnice bohatě pokrývá předmět *Matematická analýza II — NMAI055*, který učím v Informatické sekci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy od školního roku 2004/05. Text je proložen více než 70 úlohami, někdy zábavnými, a návody k řešení skoro všech naleznete na konci od strany 114. Představu o obsahu a stylu učebnice podávají Obsah, Úvod a závěrečný Rejstřík (od strany 119). Učebnice vychází z přednášky v letním semestru školního roku 2018/19, viz Obsah přednášek a zkouška. Tak jako u předchozí učebnice *Matematická analýza I* [5] pro předmět NMAI054 jsem skripta k přednášce rozšířil do obsáhlejšího textu o matematické analýze, v němž něco zajímavého nalezne doufejme každý.

červen 2019 Martin Klazar

Obsah přednášek a zkouška

Učebnice obsahuje množství doplňujícího materiálu, o kterém se nepředpokládá, že by až na jednotlivé zmínky byl podrobně přednášen. Pro orientaci a zajímavost proto uvádím skutečný obsah přednášky v r. 2019, převzatý z

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAII19.html`.

`Zápisy z přednášek` jsou odkazy na texty, které byly studentům k dispozici a tvoří základ pro tuto učebnici.

1. přednáška 19. 2. 2019. Primitivní funkce. Motivace pomocí ploch. Definice primitivní funkce a základní vlastnosti: nejednoznačnost, spojitost, linearita. Darbouxova vlastnost, důkaz. Spojitá funkce má primitivní f., zatím bez důkazu. Integrace per partes, důkaz. Značení, příklad: integrál z $\log(x)$. `Zápis z 1. přednášky` (jen malé změny proti přednášce před čtyřmi lety).

2. přednáška 26. 2. 2019. Tabulka prim. funcí. Věta o integraci substitucí, důkaz a příklady. Poznámky o prim. funkcích k racionálním funkcím (hlavně věta: pro každou rac. funkci se její prim. funkce dá vyjádřit rac. funkcemi, logaritmy a arkustangentami, na přednášce bez důkazu), podrobněji v zápisu z přednášky a v učebnici. **Riemannův integrál.** Dvě definice: původní Riemannova a Darbouxova. Tvrzení: neomezená funkce nemá R. integrál (ani podle jedné definice), důkaz ponechán jako cvičení. `Zápis z 2. přednášky` (jen malé změny proti přednášce před čtyřmi lety).

3. přednáška 5. 3. 2019. Zajímavost: Liouvilleova věta o nevyjádřitelnosti vzorcem primitivní funkce k funkci $f.e^g$, kde f a g jsou racionální. Odvozeno, že prim. funkce k $\exp(x^2)$ se nedá vyjádřit vzorcem. Zjemnění dělení a důkaz nerovností pro $s(f, D)$ a $S(f, D)$ po náhradě dělení jeho zjemněním. Tvrzení: dolní integrál je nejvýše horní integrál, důkaz. Důsledek: kritérium integrovatelnosti, důkaz. Příklady: omezená funkce bez integrálu a (viz zápis, na přednášce nebylo) výpočet $\int_0^1 x^2\,dx$ podle definice. Množiny míry nula a jejich vlastnosti. Lebesgueova věta: funkce má R. integrál, právě když je omezená a množina bodů, kde je nespojitá, má míru nula. Aplikace: složenina funkcí $f(g)$, kde g má R. integrál a f je spojitá, má R. integrál. Zmínka o nespočetné množině s mírou nula, podrobněji příště. `Zápis ze 3. přednášky` (před 4 lety, letos skoro stejné).

4. přednáška 12. 3. 2019. Nespočetná množiny s mírou nula - Cantorovo diskontinuum. Tvrzení: monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost, důkaz. Stejnoměrná spojitost. Tvrzení: spojitost na kompaktním intervalu $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost, důkaz. Tvrzení : spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost, důkaz. Tvrzení o linearitě integrálu, důkaz pomocí 1. definice R. integrálu. Složení spojité funkce a integrovatelné dává integrovatelnou. Tvrzení o linearitě integrálu jako funkci integračních mezí, důkaz. Integrál pres cyklus je 0. `Zápis ze 4. přednášky` (bylo to zhruba jako před 4 lety).

5. přednáška 19. 3. 2019. První a druhá základní věta analýzy (vztah mezi integrálem a primitivní funkcí), důkazy. Newtonův integrál a porovnání s Riemannovým integrálem, důkaz. Počítání integrálů per partes (cvičení), substituce příště. Aplikace integrálu: odhady $\log(n+1) < H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n < 1 + logn$ a odhad faktoriálu $n!$ odhadem sumy $\log(n!) = \log 1 + \log 2 + ... + \log n$. `Zápis z 5. přednášky` (až na tu substituci, která bude příště, jako před 4 lety).

6. přednáška 26. 3. 2019. Substituční formule. Zmínka o Stirlingově formuli $n! \sim (2\pi.n)^{1/2}(n/e)^n$. Tvrzení: integrální kritérium konvergence nekonečné řady, důkaz a příklady. Tvrzení (diskrétní součet jako integrál): Když jsou $a < b$ celá čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce, pak suma $\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f + c(f(b) - f(a))$, kde c je číslo v $[0,1]$, důkaz aditivní metodou. Vyjádření faktoriálu integrálem: $n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$, důkaz (per partesem a indukcí). Počítání plochy rovinného útvaru, délky oblouku křivky a objemu rotačního tělesa pomocí integrálu, bez důkazu (definice délky oblouku křivky jen načrtnuta, definice objemu v $\mathbb{R}^3$ příště). `Zápis z 6. přednášky` (nestihli jsme začít funkce více proměnných, začneme je příště).

7. přednáška 26. 3. 2019. Ještě poznámka k počítáním objemu rotačního tělesa integrálem - definice objemu tělesa v $\mathbb{R}^3$. Diferenciální počet funkcí několika proměnných. $\mathbb{R}^n$ jako vektorový prostor, euklidovský skalární součin, euklidovská norma a vzdálenost a jejich vlastnosti. Koule $B(s,r)$, definice otevřené množiny. Tvrzení: vlastnosti ot. množin, důkaz v rychlosti. Směrová derivace, parciální derivace funkce a diferenciál funkce i zobrazení v daném bodě a. Příklady na parciální derivace (samy o sobě nezaručují spojitost v daném bodě). Tvrzení: (i) diferenciál zobrazení $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, kde $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jsou souřadnicové funkce, je určený jednoznačně, (ii) f má diferenciál v a, právě když ho má každá f_i a (iii) diferenciál v a implikuje spojitost v a, důkaz jako cvičení. Tvrzení: diferenciál implikuje parc. derivace, důkaz a pokračování příště. `Zápis ze 7. přednášky` (před 4 lety jsem toho stihl více, letos její závěr probereme příště).

8. přednáška 9. 4. 2019. Důkaz slíbený minule. Tvrzení: má-li zobrazení f v a diferenciál, jsou prvky matice (tzv. Jacobiho matice f v a), jež ho určuje, rovny hodnotám parciálních derivací souřadnicových funkcí v a, důkaz je jasný. Věta: má-li funkce f v okolí a všechny parciální derivace a ty jsou spojité v a, pak má f v a diferenciál, důkaz pouze pro 2 proměnné. Zobecnění Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro více proměnných, bez důkazu. Souvislé otevřené množiny. Tvrzení: nulové parc. derivace na souvislé otevřené množině implikují konstantnost funkce, důkaz. Počítání s parc. derivacemi a diferenciály. Věta o diferenciálu složeného zobrazení, uvedeno lemma o asymptotickém značení, vlastní důkaz příště. `Zápis z 8. přednášky.`

9. přednáška 16. 4. 2019. Slíbený důkaz. Jacobiho matice složeného zobrazení je součin J. matic těchto zobrazení, řetízkové pravidlo pro parciální derivování složené funkce. Tečná rovina. Parciální derivace vyšších řádů. Věta o jejich záměnnosti, důkaz. (Taylorův polynom funkcí několika proměnných, bez důkazu, bude až příště). `Zápis z 9. přednášky.`

10. přednáška 23. 4. 2019. Taylorův polynom funkcí několika proměnných, bez důkazu. Rekapitulace kritéria lokálního extrému pomocí druhé derivace pro funkce jedné proměnné. Věta o nabývání extrému na kompaktu, (zatím?) bez důkazu. Hessova matice. Věta o lokálních extrémech pro funkce několika proměnných, důkaz. `Zápis z 10. přednášky` (zhruba jako před 4 lety, implicitní funkce budou příště).

11. přednáška 30. 4. 2019. Věta o implicitních funkcích, bez důkazu. Příklad na implicitní funkce.Vázané extrémy a Lagrangeovy multiplikátory. Příklad. Metrické prostory. Definice metr. prostoru. `Zápis z 11. přednášky` (před 4 lety, letos jsme stihli méně).

12. přednáška 7. 5. 2019. Definice metr. prostoru, příklady. Základní pojmy: koule, dále otevřené, uzavřené, omezené, obojetné a kompaktní množiny. Konvergence v MP. Vlastnosti otevřených a uzavřených množin, důkaz jako úloha. Uzavřenost množiny znamená uzavřenost na limity, důkaz. Spojitá zobrazení mezi MP, ekvivalentní topologická definice pomocí otevřených množin, důkaz. Kompaktní množiny, i topologická definice (Heineho – Borelova věta), bez důkazu. Tvrzení: kompaktní množina se spojitým zobrazením posílá na kompaktní množinu, důkaz. Tvrzení: kompaktní množiny jsou omezené a uzavřené, důkaz. Příklad, že naopak to obecně neplatí, podrobně příště. Tvrzení: naopak to platí v eukleidovských prostorech, důkaz příště. Tvrzení: spojité zobrazení nabývá na kompaktní množině mimimum i maximum, důkaz příště. `Zápis z 12. přednášky.`

Úvod

Několik obecností o matematické analýze, jejím vztahu k teorii množin, fyzice a informatice jsem uvedl v Úvodu v *MA I* [5] a odkazuji čtenáře tam. Zaujala mne však definice [11, strana 103] matematické analýzy od R. Penrose, totiž jejích dvou polovin, diferenciálního a integrálního počtu, kterou zde zopakuji.

> CALCULUS — or, according to its more sophisticated name, *mathematical analysis* — is built from two basic ingredients: *differentiation* and *integration.* Differentiation is concerned with velocities, acceleration, the slopes and curvature of curves and surfaces, and the like. These are rates at which things change, and they are quantities defined *locally*, in terms of structure or behaviour in the tiniest neighbourhoods of single points. Integration, on the other hand, is concerned with areas and volumes, with centres of gravity, and with many other things of that general nature. These are things which involve measures of *totality* in one form or another, and they are not defined merely by what is going on in the local or infinitesimal neighbourhoods of individual points. The remarkable fact, referred to as the *fundamental theorem of calculus*, is that each one of these ingredients is essentially just the *inverse* of the other. It is largely this fact that enables these two important domains of mathematical study to combine together and to provide a powerful body of understanding and of calculational technique.[1]

D. Hilbert napsal v [3, str. 166] o analýze následující.

> Wir kommen nun zur Analysis, diesem kunstvollsten und am feinstem verzweigten Gebilde der mathematischen Wissenschaft. Sie wissen, welch maßgebende Rolle das Unendliche dort spielt, wie die

[1]Kalkulus — odborněji *matematická analýza* — je složen ze dvou základních částí: *derivování* a *integrace.* Derivování se zabývá rychlostmi, zrychlením, sklony a křivostí křivek a ploch a podobně. Jsou to míry změn věcí a jsou to veličiny definované *lokálně*, pomocí struktury či chování v nejužších okolích jednotlivých bodů. Integrace se na druhé straně zabývá plochami a objemy, těžišti a mnoha jinými věcmi této obecné povahy. Zahrnují stupně *agregovanosti, úplnosti* v té či oné podobě a nejsou definované pouze tím, co se odehrává v lokálních či nekonečně malých okolích jednotlivých bodů. Pozoruhodnou skutečností, tak zvanou *Základní větou analýzy*, je, že každá z těchto částí je vpodstatě *opakem* druhé. Především díky této skutečnosti se mohou obě důležité oblasti matematiky propojit a vytvořit mocný soubor porozumění a výpočetních postupů.

> mathematische Analysis gewissermaßen eine einzige Symphonie des Unendlichen ist.[2]

Tamtéž o kousek dál nacházíme na [3, str. 170] i jeden z nejznámějších Hilbertových citátů: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.* — Z ráje, který nám stvořil Cantor, nás nikdo nesmí vyhnat.

Úloha 0.0.1. *Nechybí v citátu něco? Vyhledejte a porovnejte jeho další verze, jakož i jeho další překlady do češtiny.*

Zhruba první polovina učebnice se zabývá integrálním počtem a souvislostmi integrálů a derivací. Druhá je věnována diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných. V závěru se zmíníme o metrických prostorech. Zrekapitulujeme teď stručně obsah a pak se k jednotlivým kapitolám a důležitým výsledkům v nich vrátíme podrobněji. Kapitola 1 se zabývá primitivními funkcemi, které obracejí derivace: pro danou funkci f hledáme funkci F splňující vztah $F' = f$. Ukážeme, že i když je f zadána vzorcem, pro F už vzorec nemusí existovat. Kapitola 2 studuje integrály funkcí, hlavně Riemannův, ale i řadu dalších, například pro funkce více proměnných či klasický Lebesgueův integrál, a uvádí jejich různé aplikace. Kapitola 3 je věnována diferenciálnímu počtu, to jest derivování, funkcí více proměnných a podíváme se v ní na hledání extrémů takových funkcí. V poslední kapitole 4 vybudujeme teorii metrických prostorů natolik, abychom mohli v úplnosti dokázat *Základní větu algebry.* Podle ní se každý nekonstantní komplexní polynom jako funkce v některém bodu komplexní roviny $\mathbb{C}$ anuluje. Je na ní založena integrace racionálních funkcí, podrobně popsaná v kapitole 1.

Důležité výsledky a koncepty v kapitole 1: pojem primitivní funkce a její nejednoznačnost; konstruce primitivních funkcí limitními přechody, zejména pro spojité funkce; Darbouxova věta o mezihodnotách; integrace per partes; integrace substitucí; rozklad racionální funkce na parciální zlomky a integrace racionálních funkcí;

Kapitola 2: dvě definice Riemanova integrálu (pracujeme hlavně s druhou, Darbouxovou);

Kapitola 3:

Kapitola 4:

[2] Dostáváme se teď k analýze, tomuto nanejvýš uměleckému a jemně propracovanému odvětví matematické vědy. Dobře víte, jak rozhodující roli v ní hraje nekonečno, jak matematická analýza je takřka jedinečnou symfonií nekonečna.

Kapitola 1

Primitivní funkce

Antiderivace a plocha: spojují je dvě základní věty analýzy.

Než primitivní funkce definujeme a začneme zkoumat, uvedeme motivaci založenou na plochách rovinných útvarů. Funkce $F = \int f$ je *primitivní* k funkci f, mají-li společný definiční obor a na něm platí vztah $F' = f$. Pro nezápornou a spojitou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou dvě reálná čísla, vezmeme rovinný útvar

$$U(a,\, b,\, f) = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \ \&\ 0 \le y \le f(x)\}\ .$$

Jeho plochu, ať to přesně znamená cokoli, označíme jako

$$\int_a^b f := \text{plocha}(U(a,\, b,\, f))\ .$$

Je to plocha části roviny vymezené osou x, grafem funkce f a svislými přímkami $y = a$ a $y = b$. *První základní věta analýzy* říká, že pro každé $c \in [a,b]$ (pro značení $F'_{(\pm)}$ viz definice 1.1.1) platí

$$\left(\int_a^x f\right)'_{(\pm)}(c) = f(c)$$

— derivace plochy útvaru $U(a,x,f)$ jako funkce x se rovná výchozí funkci $f(x)$. Plocha $F(x) = \int_a^x f$ je tedy jako funkce primitivní funkcí k f. Podle *druhé základní věty analýzy* pro každou funkci g, která je na $[a,b]$ primitivní k f, platí rovnost

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)\ .$$

Známe-li nějakou funkci primitivní k f, a mnoho se jich dá odvodit pouhým obrácením pravidel pro derivování elementárních funkcí, můžeme ihned spočítat plochu útvaru $U(a,b,f)$. Obě věty přesně zformulujeme a dokážeme v oddílu 2.1 o Riemannově integrálu. Nejprve se ale musíme v následujícím oddílu 1.1 zabývat základními vlastnostmi primitivních funkcí.

V oddílu 1.3 primitivní funkce spočítáme a dokážeme, že funkce s primitivní funkcí lze poznat z jejich vzorů. Dále popíšeme zobecněné primitivní funkce a zavedeme rigorózní počítání s primitivními funkcemi. V oddílu 1.4 objasníme, co přesně znamená vyjádření primitivní funkce $\int f$ „vzorcem“, a dokážeme větu 1.1.34 podávající kritérium existence takového vyjádření pro funkce tvaru $f = ae^b$, kde a a b jsou racionální funkce.

1.1 Základní vlastnosti primitivních funkcí

Primitivní fukce. Nejednoznačnost, spojitost a lepení. Konstrukce primitivní funkce ke spojité funkci. Darbouxova věta. Integrace per partes. Tabulka primitvních funkcí. Integrace substitucí. Primitivní funkce $\int e^{x^2}$ se nedá vyjádřit vzorcem.

V učebnici *Matematická analýza I* [5] jsme derivaci funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in M$ definovali pro obecnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ a požadovali jsme jen, aby a byl jejím bilimitním bodem. U primitivních funkcí se omezíme na jednodušší situaci, kdy M je interval. Hlavním důvodem je používání Lagrangeovy věty o střední hodnotě, která vyžaduje interval.

Definice 1.1.1 (primitivní funkce). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s kladnou délkou a funkce*

$$F,\ f\colon I \to \mathbb{R}$$

splňují pro každé $u \in I$ vztah

$$F'_{(\pm)}(u) = f(u)\ .$$

Značení vlevo znamená $F'(u)$ pro vnitřní bod $u \in I$, $F'_{+}(u)$ pro eventuální levý krajní bod u intervalu I a $F'_{-}(u)$ pro eventuální pravý krajní bod u intervalu I. Funkci F pak nazýváme primitivní funkcí k funkci f (na intervalu I) nebo též antiderivací funkce f.

Intervaly s kladnou délkou jsou intervaly

$$\mathbb{R},\ (-\infty, b],\ (-\infty, b),\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b),\ [a, +\infty)\ \text{ a }\ (a, +\infty)\ ,$$

kde $a < b$ jsou reálná čísla, a budeme je dále označovat symboly I a J. *Otevřený (takový) interval* je $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ s $a < b$, a *kompaktní (takový) interval* je $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$. Narozdíl od jiných operací s funkcemi není primitivní funkce, když existuje, zdaleka jednoznačně určená. Jak uvidíme, primitivní funkce buď neexistuje nebo jich je nekonečně (dokonce nespočetně) mnoho. Důkaz linearity antiderivování přenecháme čtenáři jako úlohu.

Úloha 1.1.2. *Je-li F na I primitivní k f, G ke g a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom je funkce*

$$\alpha F + \beta G$$

primitivní na I k funkci $\alpha f + \beta g$. (Dokažte.)

Tvrzení 1.1.3 (o nejednoznačnosti primitivní funkce). *Nejednoznačnost primitivní funkce je charakterizovaná následovně.*

1. *Je-li funkce F na intervalu I primitivní k funkci f, potom pro každé číslo $c \in \mathbb{R}$ je i funkce $F + c$ primitivní k f.*

2. *Jsou-li funkce F a G primitivní na intervalu I k f, potom existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, že na I platí $F = G + c$ — všechny primitivní funkce k dané funkci se mezi sebou liší jen posunem o konstantu.*

3. *Množina všech funkcí primitivních na intervalu I k dané funkci f je tedy buď prázdná nebo tvaru*

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}\ ,$$

kde F je libovolná pevná primitivní funkce k f.

Důkaz. 1. Derivace konstantní funkce je nulová, a tak $(F + c)' = F' + 0 = f$ pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každou funkci F primitivní na I k f.

2. Nechť F a G jsou na I primitivní k f, $a \in I$ je libovolné pevné číslo a $c = F(a) - G(a)$. Pro libovolné číslo $x \in I$, $x \neq a$, pak díky Lagrangeově větě o střední hodnotě (viz *MA I* [5]) máme pro nějaké číslo ξ ležící mezi x a a rovnosti (úloha 1.1.4)

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x)) - (F(a) - G(a)) &= (F - G)(x) - (F - G)(a)\\ &= (x - a)(F - G)'(\xi)\\ &= (x - a)(F'(\xi) - G'(\xi))\\ &= (x - a)(f(\xi) - f(\xi)) = 0\ .\end{aligned}$$

Takže

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) = c \ \text{ a } \ F(x) = G(x) + c\ .$$

Podle definice c tato rovnice platí i pro $x = a$.

3. Popis množiny všech funkcí primitivních k dané funkci plyne z výsledků částí 1 a 2. □

Úloha 1.1.4. *Zdůvodněte každý ze čtyř kroků výpočtu důkazu části 2.*

Úloha 1.1.5. *Ukažte, že předchozí charakterizace nejednoznačnosti primitivní funkce neplatí pro nevlastní derivace: popište takové funkce $f, g\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, že $f' = g'\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}^*$ (výjimečně povolujeme funkční hodnoty $\pm\infty$), ale g není f posunutá o konstantu.*

Tvrzení 1.1.6 (spojitost primitivní funkce). *Je-li funkce F primitivní k funkci f na intervalu I, potom je F na I spojitá.*

Důkaz. Ze ZS a *MA I* [5] víme, že existence vlastní (a případně jednostranné, jde-li o krajní bod) derivace funkce v bodě implikuje její spojitost v daném bodě. Protože $F'_{(\pm)}(\alpha)$ existuje a rovná se $f(\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$, je F spojitá v každém bodě $\alpha \in I$. $\square$

Často se plete spojitost funkce f se spojitostí její primitivní funkce F. Funkce F je nutně spojitá, protože $F' = f$, ale f spojitá být nemusí: uvedeme příklad. Uvedli jsme ho už v *MA I* [5], ale je dobré si ho připomenout.

Příklad 1.1.7. *Spočítáme derivaci funkce*

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definované jako $F(0) = 0$ *a pro* $x \neq 0$ *jako*

$$F(x) = x^2 \sin(x^{-1}) \; .$$

Patrně

$$f(x) := F'(x) = 2x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}), \;\; x \neq 0 \; ,$$

a

$$f(0) := F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin(x^{-1}) = 0 \; .$$

Spojitá funkce F tak má nespojitou (v 0) derivaci $f = F'$ (úloha 1.1.8). $\square$

Úloha 1.1.8. *Vysvětlete, proč* f *není spojitá v nule a proč* $F(x)/x \to 0$ *pro* $x \to 0$.

Pro sestavení primitivní funkce z několika částí v následujícím tvrzení si připomeneme důležitý vztah z *MA I* [5] mezi derivací a jednostrannými derivacemi: je-li $F\colon I \to \mathbb{R}$ funkce a $c \in I$ je vnitřní bod intervalu I, pak

$$F'(c) = d \in \mathbb{R}^* \iff F'_-(c) = d \;\&\; F'_+(c) = d \; .$$

Úloha 1.1.9. *Dokažte tento vztah.*

Tvrzení 1.1.10 (slepování PF). *Nechť*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b, \;\; n \in \mathbb{N} \; ,$$

je dělení kompaktního intervalu $[a, b]$ *a*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

je funkce, která (přesně řečeno, její zúžení) má na každém podintervalu $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *primitivní funkci. Potom má* f *primitivní funkci na celém intervalu* $[a, b]$.

Důkaz. Nechť $n \geq 2$, jinak není co dokazovat, a F_i je primitivní k f na I_i. Vezmeme $d \in \mathbb{R}$, že $F_0(a_1) = F_1(a_1) + d$. Funkci $F\colon [a_0, a_2] \to \mathbb{R}$ definujeme jako F_0 na I_0 a jako $F_1 + d$ na I_1 (úloha 1.1.11). Vzhledem k definici funkcí F_0 a F_1 pro každé $c \in [a_0, a_2]$, $c \neq a_1$, je $F'_{(\pm)}(c) = f(c)$. V bodě $c = a_1$ pak máme

$$F'_-(c) = (F_0)'_-(c) = f(c) = (F_1)'_+(c) = (F_1 + d)'_+(c) = F'_+(c) ,$$

takže podle připomenutí $F'(c) = f(c)$ i pro $c = a_1$. Funkce F je tedy primitivní k f na celém intervalu $[a_0, a_2]$. Podobně ji rozšíříme na antiderivaci k f na celém intervalu $[a, b]$. □

Tento výsledek také ukazuje užitečnost definice primitivní funkce v krajních bodech intervalu jednostrannými derivacemi.

Úloha 1.1.11. *Proč jsme v definici funkce F posunuli F_1 o d?*

Dáme do souvislosti primitivní funkce s uspořádáním. Tento výsledek použijeme v oddílu 2.5 o Newtonově integrálu.

Tvrzení 1.1.12 (primitivní funkce a uspořádání). *Nechť*

$$F,\ f,\ G,\ g\colon I \to \mathbb{R}$$

jsou funkce definované na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s kladnou délkou a na I je F primitivní k f a G ke g. Nechť dále pro každé $x \in I$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak pro každé $x, y \in I$, $x \leq y$, je Pak

$$F(y) - F(x) \leq G(y) - G(x)) .$$

Důkaz. Stejně jako v důkazu druhé části tvrzení 1.1.3 argumentujeme, že pro každá dvě čísla $x < y$ z I existuje číslo $\xi = \xi(x, y)$ ležící mezi nimi, že

$$(F(y) - F(x)) - (G(y) - G(x)) = (y - x)(f(\xi) - g(\xi)) \leq 0 .$$

Tato nerovnost platí ovšem i pro $x = y = \xi$. □

Úloha 1.1.13. *Dokažte opačnou implikaci ($F(y) - F(x) \leq G(y) - G(x)$) pro $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq g(y)$ pro $x \leq y$) pro spojité funkce f a g.*

Dále prozkoumáme chování primitivních funkcí při limitních přechodech. Řekneme, že posloupnost funkcí

$$f_n\colon M \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} ,$$

definovaných na množině $M \subset \mathbb{R}$ *konverguje na M lokálně stejnoměrně k funkci* $f\colon M \to \mathbb{R}$, stručně psáno *lokálně $f_n \rightrightarrows f$ na M*, když pro každé $a \in M$ existuje otevřený interval $I \ni a$, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$n \geq n_0,\ x \in I \cap M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Pokud lze vždy položit $I = \mathbb{R}$, pak řekneme, že f_n *konvergují na M stejnoměrně k f* a píšeme stručně $f_n \rightrightarrows f$ *na M.*

Věta 1.1.14 (limita primitivních funkcí). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s kladnou délkou, $a \in I$ je libovolný pevný bod a $f, f_n \colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce splňující následující dvě podmínky.*

1. *Lokálně $f_n \rightrightarrows f$ na I.*
2. *Každá f_n má na I primitivní funkci.*

Pak posloupnost těch primitivních funkcí F_n k f_n, které splňují $F_n(a) = 0$ pro každé n v $\mathbb{N}$, konverguje na I lokálně stejnoměrně k funkci F, jež je na I primitivní k f.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že posloupnost $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, je stejnoměrně Cauchyova vzhledem k $x \in J$ pro každý kompaktní interval $J \subset I$ obsahující a. Skutečně, pokud $m \geq n$ a $x \in J$, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme nerovnost

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| &\leq |(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(a)| + |F_m(a) - F_n(a)| \\ &= |(x - a)(f_m - f_n)(b)| , \end{aligned}$$

pro nějaké b ležící mezi x a a a tedy v J. Podle předpokladu 1 a kompaktnosti J máme $f_n \rightrightarrows f$ na J a poslední absolutní hodnota je proto pro velké n stejnoměrně malá. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že když $m \geq n \geq n_0$, pak $|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in J$. Proto máme funkci $F \colon I \to \mathbb{R}$, že $F_n \rightrightarrows F$ na J a tedy lokálně $F_n \rightrightarrows F$ na I.

Nyní ukážeme, že F je na I primitivní k f. Buď dáno $x_0 \in I$ a $J \subset I$ buď kompaktní interval obsahující x_0 ve svém relativním vnitřku. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na J, můžeme vzít $n_0 \in \mathbb{N}$, že když $m \geq n \geq n_0$, pak $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in J$. Vezmeme pevné $n \geq n_0$, že $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Neboť $F_n' = f_n$ na I, můžeme vzít takový interval $K \subset J$ relativně otevřený v J (úloha 1.1.15) a obsahující x_0, že pro každé $x \in K$, $x \neq x_0$, máme $|\frac{F_n(x) - F_n(x_0)}{x - x_0} - f_n(x_0)| < \varepsilon$. Buď dáno $x \in K$, $x \neq x_0$. Vezmeme pevné $m \geq n$, že $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - \frac{F_m(x)-F_m(x_0)}{x-x_0}\right| < \varepsilon$. Pak pro dané $x \in K$ máme, díky předchozím volbám, Lagrangeově větě o střední hodnotě a díky trojúhelníkové nerovnosti, že

$$\begin{aligned} &\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \frac{F_m(x) - F_m(x_0)}{x - x_0}\right| + \\ &+ \left|\frac{(F_m - F_n)(x) - (F_m - F_n)(x_0)}{x - x_0}\right| + \left|\frac{F_n(x) - F_n(x_0)}{x - x_0} - f_n(x_0)\right| + \\ &+ |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon + |(f_m - f_n)(y)| + \varepsilon + \varepsilon < 4\varepsilon , \end{aligned}$$

pro nějaké y ležící mezi x_0 a x a tedy v J. Proto $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Úloha 1.1.15. *Co se myslí relativní otevřeností K v J?*

Větu použijeme k důkazu, že spojitá funkce má primitivní funkci. V *MA I* [5] jsme dokázali, že pro každou omezenou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, existuje funkce $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, že $F'_{(\pm)}(c) = f(c)$ platí v každém bodu spojitosti $c \in [a,b]$ funkce f. Slabší verzi tohoto výsledku s f riemannovsky integrovatelnou dokážeme ve větě 2.1.

Věta 1.1.16 (spojitá funkce má antiderivaci). *Když $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak má f na I primitivní funkci.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $I = [a,b]$ je kompaktní. Pak je f dokonce stejnoměrně spojitá (viz *MA I* [5]) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ intervalu $[a,b]$ (pro jednoduchost neznačíme závislost na n), že

$$a_i \le x \le a_{i+1} \Rightarrow |f(x) - f(a_i)| < \frac{1}{n} \ \text{ a } \ |f(x) - f(a_{i+1})| < \frac{1}{n}$$

pro každé $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Nechť $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je po částech lineární a spojitá funkce, jejíž graf je tvořen lomenou čarou se zlomy přesně v bodech $(a_i, f(a_i))$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Ověříme, že f_n a f splňují předpoklady 1 a 2 věty 1.1.14. Podle definice f_n pro $x \in [a_i, a_{i+1}]$ číslo $f_n(x)$ leží neostře mezi $f(a_i)$ a $f(a_{i+1})$, tudíž $|f(x) - f_n(x)| < \frac{2}{n}$. Vidíme, že dokonce $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a 1 platí. Protože pro každé $u, v, w \in \mathbb{R}$ je funkce $(u/2)x^2 + vx + w$ primitivní na každém intervalu k lineární funkci $ux + v$, má podle tvrzení 1.1.10 funkce f_n antiderivaci na celém intervalu $[a,b]$ a 2 platí. Podle věty 1.1.14 má f na $[a,b]$ primitivní funkci.

Nechť I je nekompaktní interval. Je jasné, že existuje taková posloupnost (I_n) kompaktních intervalů, že

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I \ \text{ a } \ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I\ .$$

Použijeme už dokázaný výsledek a jako F_n označíme funkci primitivní k f na I_n. Podle částí 1 a 2 tvrzení 1.1.3 lze posuny funkcí F_n o konstanty dosáhnout toho, že pro každé dva indexy $m < n$ se zúžení F_n na I_m rovná F_m. Sjednocení

$$F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

pak je funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$. Ukážeme, že F je na I primitivní k f. Je-li $c \in I$ vnitřní bod I, existuje n, že c je vnitřní bod intervalu I_n a $F'(c) = F'_n(c) = f(c)$. Je-li $c \in I$ třeba levý krajní bod I, existuje n, že c je levý krajní bod intervalu I_n a zase $F'_+(c) = (F_n)'_+(c) = f(c)$. Podobně, je-li $c \in I$ pravý krajní bod I. □

V *MA I* [5] jsme dokázali větu, že funkce spojitá na intervalu na něm nabývá všechny mezihodnoty (a zobrazuje ho tak zase na interval). Francouzský matematik *Jean-Gaston Darboux (1842–1917)* (narodil se v Nîmes, zabýval se diferenciální geometrií a analytickými funkcemi, byl členem více než 100 vědeckých společností) dokázal, že každá funkce s primitivní funkcí má tuto vlastnost též. Vzhledem k předchozímu tvrzení a větě jde o ostře širší třídu funkcí, než jsou spojité funkce.

Věta 1.1.17 (J.-G. Darboux, ?). *Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci, potom f nabývá na I všechny mezihodnoty.*

Důkaz. Vezměme nějakou mezihodnotu c: $f(x_1) < c < f(x_2)$ pro nějaká dvě čísla $x_1 < x_2$ z I. Nalezneme $x^* \in (x_1, x_2)$, že $f(x^*) = c$. (Pokud $f(x_1) > c > f(x_2)$, následující argument se lehce upraví náhradou minima maximem.) Funkce

$$H(x) = F(x) - cx \ ,$$

kde F je na I primitivní k f, je na I spojitá, dokonce tam má vlastní derivaci

$$H'(x) = (F(x) - cx)' = f(x) - c \ .$$

Podle věty z *MA I* [5] H nabývá na kompaktním intervalu $[x_1, x_2]$ minimum v bodě $x^* \in [x_1, x_2]$. Protože $H'_{(+)}(x_1) = f(x_1) - c < 0$, je H klesající v bodě x_1 a pro nějaké $\delta > 0$ máme $x \in (x_1, x_1 + \delta) \Rightarrow H(x) < H(x_1)$. Tudíž $x^* \neq x_1$. Obdobně z $H'_{(-)}(x_2) > 0$ plyne, že $x^* \neq x_2$. Tedy $x^* \in (x_1, x_2)$ a podle kritéria extrému z *MA I* [5] musí být $H'(x^*) = f(x^*) - c = 0$. Tedy $f(x^*) = c$. $\square$

Důsledek 1.1.18 (funkce bez primitivní funkce). *Funkce*

$$\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ,$$

definovaná jako $\mathrm{sgn}(x) = -1$ *pro* $x < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ *a* $\mathrm{sgn}(x) = 1$ *pro* $x > 0$, *nemá na* $\mathbb{R}$ *a ani na žádném jiném intervalu s kladnou délkou obsahujícím* 0 *primitivní funkci.*

Důkaz. Funkce sgn nabývá hodnotu 0 a také hodnotu -1 nebo 1, ale nikoli hodnotu $-\frac{1}{2}$ nebo $\frac{1}{2}$. Podle Darbouxovy věty tedy na daném intervalu nemá primitivní funkci. $\square$

Úloha 1.1.19. *Dokažte přímo, bez použití Darbouxovy věty, že* $\mathrm{sgn}(x)$ *nemá na* $(-1, 1)$ *primitivní funkci.*

Vztah, že funkce F je na intervalu I primitivní k funkci f se budeme zapisovat jako

$$F = \int f + c \ \ (\text{na } I), \quad F = \int f + c \ \text{ nebo i jen jako } \ F = \int f,$$

pro připomenutí, že každé posunutí F o konstantu c je také primitivní funkcí k f. Symbolu $\int f$ lze rozumět i tak, že označuje množinu všech funkcí primitivních na daném intervalu k f. V konkrétních výrazech pak $\int f$ představuje libovolnou z těchto funkcí, přičemž pro různé primitivní funkce máme obecně různé konstanty c. K problému symbolu $\int f$ — jeho významu a způsobům operování s ním — se vrátíme v oddílu 1.3.

Leibnizův vzorec $(fg)' = f'g + fg'$ pro derivaci součinu vede pro primitivní funkce k následujícímu.

Věta 1.1.20 (integrace per partes). *Nechť I je interval s kladnou délkou a*

$$F,\, G,\, f,\, g\colon I \to \mathbb{R}$$

jsou funkce, kde F je na I primitivní k f a G ke g. Potom primitivní funkce k fG existuje, právě když exisuje k Fg. Existují-li tyto primitivní funkce, platí rovnost

$$\int fG = FG - \int Fg + c\ .$$

Důkaz. Když existuje $\int fG$, pak

$$\left(FG - \int fG\right)' = fG + Fg - fG = Fg\ .$$

Tedy $FG - \int fG = \int Fg + c$, což je ekvivalentní obměna hořejší rovnice. Když existuje $\int Fg$, pak

$$\left(FG - \int Fg\right)' = fG + Fg - Fg = fG\ .$$

Tedy $FG - \int Fg = \int fG + c$, což je ekvivalentní obměna hořejší rovnice. □

Důsledek 1.1.21 (per partes pro spojité funkce). *I buď interval s kladnou délkou a*

$$f,\, g\colon I \to \mathbb{R}$$

buďte spojité funkce. Potom existují primitivní funkce $F = \int f$, $G = \int g$, $\int Fg$ a $\int fG$ a

$$\int fG = FG - \int Fg + c\ .$$

Důkaz. Uvedené čtyři primitivní funkce existují díky větě 1.1.16 a spojitosti součinu dvou spojitých funkcí. Vzorec pak platí podle předchozí věty či se hned ověří přímým zderivováním. □

Vzorec pro integraci per partes píšeme asymetricky

$$\int F'G = FG - \int FG'\ ,$$

a ne symetricky jako $\int F'G + \int FG' = FG$, z výpočetních důvodů: primitivní funkci vlevo neznáme a počítáme ji pomocí té vpravo.

Příklad 1.1.22. *Nalezneme $\int \log x$.*

$$\int \log x = \int (x)' \log x \stackrel{p.p.}{=} x \log x - \int x(\log x)' = x \log x - \int 1 = x \log x - x \ .$$

Pro kontrolu, $(x \log x - x)' = (x \log x)' - 1 = \log x + x/x - 1 = \log x$. Primitivní funkce k $\log x$ hraje důležitou roli v kombinatorice, lze pomocí ní odvodit Stirlingovu formuli

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ n \to \infty$$

— podrobně ji dokážeme dvěma způsoby v oddílu 2.6, a také v analytické teorii čísel. □

Příklad 1.1.23. *Nalezneme* $\int \cos^2 x$.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x &= \int (\sin x)' \cos x \stackrel{p.p.}{=} \sin x \cos x - \int \sin x (\cos x)' \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \ . \end{aligned}$$

Zdá se, že jsme si moc nepomohli, ale zachrání nás identita $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Nahradíme $\sin^2 x$ a máme rovnici

$$\int \cos^2 x = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \ ,$$

kterou snadno vyřešíme pro $\int \cos^2 x$:

$$\int \cos^2 x = \frac{\sin x \cos x + x}{2} \ .$$

□

Úloha 1.1.24. *Derivováním tento výsledek zkontrolujte.*

Úloha 1.1.25. *Spočtěte, na* $\mathbb{R}$, $\int x^2 e^x$.

Obrácením vzorců pro derivace elementárních funkcí dostaneme tabulku základních primitivních funkcí.

Tvrzení 1.1.26 (tabulka primitivních funkcí). *Platí následující vzorce.*

1. *Pro* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ *a* $x \in (0, +\infty)$ *je* $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
2. *Pro* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *s* $\alpha < -1$ *a* $x \in (0, +\infty)$ *nebo* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
3. *Pro* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *s* $\alpha > -1$ *a* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
4. *Pro* $x \in (0, +\infty)$ *nebo* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $\int x^{-1} = \log |x|$.
5. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\int e^x = e^x$.

6. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\int \sin x = -\cos x$.

7. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\int \cos x = \sin x$.

8. *Pro každé* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $x \in ((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$ *je* $\int 1/\cos^2 x = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

9. *Pro každé* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ *je* $\int 1/\sin^2 x = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x}$.

10. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\int 1/(1+x^2) = \arctan x$.

11. *Pro* $x \in (-1, 1)$ *je* $\int 1/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$.

Důkaz. Plyne obrácením vzorců pro derivování. □

Nezahrnuli jsme hyperbolické funkce, jako je $\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}$, ani další goniometrické funkce, například sekans $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, oblíbený v USA. Všimněte si, že formální derivování dává

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = \frac{-1}{-x} = (\log(-x))' \ .$$

Funkce $\log x$ a $\log(-x)$ se ale neliší jen posunem o konstantu, takže $1/x$ má dvě podstatně odlišné primitivní funkce??

Úloha 1.1.27. *Jak je to možné?*

Úloha 1.1.28. *Ověřte, že na uvedených intervalech i* $\int 1/(1+x^2) = -\mathrm{arccot}\, x$ *a* $\int 1/\sqrt{1-x^2} = -\arccos x$.

Obrácením pravidla pro derivaci součinu jsme dostali vzorec pro integraci per partes. Obrácením pravidla pro derivaci složené funkce dostaneme vzorec pro integraci substitucí. Jeho dva tvary odpovidají dvěma směrům čtení, od známého k neznámému, rovnosti

$$f(\varphi)' = f'(\varphi)\varphi' \ ,$$

tedy rovnosti $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$.

Věta 1.1.29 (integrace substitucí). *Nechť* $\alpha < \beta$ *a* $a < b$ *jsou reálná čísla a*

$$\varphi\colon (\alpha,\, \beta) \to (a,\, b) \ \text{ a } \ f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R}$$

jsou funkce, přičemž na (α, β) *existuje vlastní* φ'.

1. *Když* $F = \int f$ *na* (a, b), *potom* $\int f(\varphi)\varphi' = F(\varphi) + c$ *na* (α, β).

2. *Když navíc*
$$\varphi((\alpha,\, \beta)) = (a,\, b) \ \text{ a } \ \varphi' \neq 0 \ \text{ na } (\alpha,\, \beta)$$
a když $G = \int f(\varphi)\varphi'$ *na* (α, β), *potom* $\int f = G(\varphi^{\langle -1 \rangle}) + c$ *na* (a, b).

Důkaz. 1. Plyne to derivováním: na (α, β) je

$$F(\varphi)' = F'(\varphi)\varphi' = f(\varphi)\varphi' \ ,$$

podle předpokladu o F a podle derivace složené funkce.

2. Předpoklady o funkci φ zaručují, že to je rostoucí nebo klesající bijekce z (α, β) na (a, b). Skutečně, na (α, β) musí být $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$, jinak by podle věty 1.1.17 musela funkce φ' nabýt mezihodnotu 0. Podle výsledků ze ZS (*MA I* [5]) tedy φ na (α, β) roste nebo klesá. Je to tedy prostá funkce a má inverzní funkci

$$\varphi^{\langle -1 \rangle} : \ (a,\, b) \to (\alpha,\, \beta) \ ,$$

kterou derivujeme podle vzorce pro derivaci inverzní funkce (*MA I* [5]). Podle předpokladu o G, podle derivace složené funce a derivace inverzní funkce dostáváme, že $G(\varphi^{\langle -1 \rangle})$ je na (a, b) primitivní k f:

$$G(\varphi^{\langle -1 \rangle})' = G'(\varphi^{\langle -1 \rangle}) \cdot (\varphi^{\langle -1 \rangle})' = f(\varphi(\varphi^{\langle -1 \rangle}))\varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle}) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle})} = f \ .$$

□

Ve větě 2.4.1 dokážeme obecnější a obtížnější substituční větu pro Riemannův–Stieltjesův integrál.

Příklad 1.1.30. *Nechť $F(x) = \int f(x)$ na otevřeném intervalu I a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$. Potom $\int f(ax + b) =?$ a na jakém intervalu?*

Použijeme první substituční pravidlo pro funkci $\varphi(x) = ax+b$ a interval $(\alpha, \beta) = \varphi^{\langle -1 \rangle}(I) = a^{-1}(I - b)$. Podle něj na (α, β) máme

$$\int f(ax + b) = \int f(\varphi) = a^{-1} \int f(\varphi)\varphi' = a^{-1}F(ax + b) + c \ .$$

□

Úloha 1.1.31. *Co by se stalo pro $a = 0$?*

Příklad 1.1.32. *Chceme spočítat primitivní funkci k $\sqrt{1 - t^2}$ na $(-1, 1)$.*

Připomíná nám poslední položku v tvrzení 1.1.26 a zkusíme proto substituci $t = \sin x$, tedy funkci

$$t = \varphi(x) = \sin x \colon \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,\, 1) \ ,$$

a druhé substituční pravidlo. Jeho předpoklady jsou splněné a $\int \sqrt{1 - t^2}$ najdeme, když na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dokážeme spočítat

$$G(x) = \int \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot (\sin x)' = \int \sqrt{\cos^2 x} \cdot \cos x = \int \cos^2 x \ .$$

Podle příkladu 1.1.23 se tato primitivní funkce rovná

$$G(x) = \frac{\sin x \cos x + x}{2} = \frac{\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} + x}{2} \, .$$

Po dosazení $x = \varphi^{\langle -1 \rangle}(t) = \arcsin t$ do $G(x)$ máme, na $(-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - t^2} &= \frac{\sin(\arcsin t)\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin t)} + \arcsin t}{2} + c \\ &= \frac{t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t}{2} + c \, . \end{aligned}$$

$\square$

Úloha 1.1.33. *Zkontrolujte výsledek derivováním.*

Narozdíl od derivování, kdy každou vzorcem danou funkci lze snadno zderivovat a výsledek je opět dán vzorcem, pro integrování, tedy počítání primitivních funkcí, to neplatí. Je spousta příkladů spojitých funkcí daných vzorcem, které tak podle důsledku 1.1.16 mají primitivní funkce, ty se ale vzorcem vyjádřit nedají. S francouzským matematikem *Josephem Liouvillem (1809–1882)* (protože jeho otec byl kapitánem v Napoleonově armádě, prvních pár let malého Josepha vychovávali v rodině strýce, v r. 1836 založil důležitý matematický časopis *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, velmi známé jsou jeho výsledky v teorii čísel: existence transcendentních reálných čísel, induktivní důkazy identit pro počty vyjádření čísel součty čtverců), který jako první nalezl kritéria pro takové primitivní funkce, jsme se už setkali v *MA I* [5] v souvislosti s jeho konstrukcí transcendentních čísel.

Věta 1.1.34 (J. Liouville, 1835). *Nechť $f, g \in \mathbb{R}(x)$ jsou racionální funkce (tedy podíly polynomů, viz definice 1.2.1). Primitivní funkci*

$$\int f e^g \ (na\ I) \, ,$$

kde I je interval neobsahující žádný kořen jmenovatelů racionálních funkcí f a g, lze vyjádřit vzorcem, právě když existuje racionální funkce $a \in \mathbb{R}(x)$, že

$$f = a' + ag' \, .$$

Větu dokážeme v oddílu 1.4, kde také přesně definujeme, co znamená „vyjádření vzorcem“. Hlavní výsledek představuje implikace $\Rightarrow$, opačná implikace je triviální vzhledem k $(ae^g)' = (a' + ag')e^g$. Věta tedy říká, že kromě zřejmého vzorce

$$f = a' + ag' \Rightarrow \int f e^g = a e^g$$

už nějaké další vzorce, méně zřejmé, neexistují.

Příklad 1.1.35. *Liouvilleovou větou ukážeme, že primitivní funkce*

$$\int e^{x^2} \text{ (na } \mathbb{R}\text{)}$$

se nedá vyjádřit vzorcem.

Zde máme $f = 1$ a $g = x^2$. Podle věty stačí dokázat, že rovnice

$$1 = a' + 2xa$$

nemá řešení tvaru $a = a(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p, q \in \mathbb{R}[x]$ s $q \neq 0$ jsou nesoudělné polynomy (nemají společný kořen). Zřejmě $p \neq 0$. Když je q konstantní, je $a = p$ polynom. Pak vlevo $\deg 1 = 0$, ale vpravo $\deg(a' + 2xa) = 1 + \deg a \geq 1$, spor. Když q není konstantní, vezmeme (podle věty 1.2.5!) nějaký jeho kořen $\alpha \in \mathbb{C}$ s násobností $m \in \mathbb{N}$. Tedy $q(x) = (x - \alpha)^m r(x)$, kde $r(\alpha) \neq 0$, a víme, že i $p(\alpha) \neq 0$. S $a = \frac{p}{q}$ rovnici přepíšeme jako

$$0 = -q^2 + p'q - pq' + 2xpq\ .$$

V polynomech $-q^2$, $p'q$, $-pq'$ a $2xpq$ má α jako kořen násobnosti, po řadě, $2m$, $\geq m$, $m - 1$ a $\geq m$ (pro $\alpha = 0$ je poslední násobnost rovná $m + 1$). Minimum z těchto násobností je tak $m - 1$ a nabývá se jednoznačně, pro jediný ze čtyř polynomů, které se tak nemohou součtem zrušit a sečíst na nulový polynom (úloha 1.1.36). Rovnice i teď nemá řešení. □

Úloha 1.1.36. *Jak se definuje násobnost kořene v nulovém polynomu? Dokažte, že když polynomy $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}[x]$ a číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ splňují, že násobnosti kořene α v $a_i(x)$ nabývají minimum pro jediný index i, pak $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \neq 0$.*

1.2 Integrace racionálních funkcí

Integrace racionálních funkcí se opírá o Základní větu algebry (již úplně dokážeme v kapitole 4), komplexní i reálnou faktorizaci polynomu a rozklad racionální funkce na parciální zlomky. $\int \frac{1}{x^4+1}$.

Naopak racionální funkce, podíly reálných polynomů, představují širokou a často používanou třídu funkcí, jejichž primitivní funkce se vždy vzorcem vyjádřit dají. Tento oddíl podrobně popisuje jejich integraci. Začíná definicí, úlohou a a příkladem.

Definice 1.2.1 (racionální funkce $\mathbb{R}(x)$). *Funkce*

$$f\colon \mathbb{R} \setminus X \to \mathbb{R}\ ,$$

kde X je konečná množina, se nazývá racionální, když existují reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_l$ s $k, l \in \mathbb{N}_0$, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus X$ je

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_l x^l} = \frac{\sum_{i=0}^k a_i x^i}{\sum_{i=0}^l b_i x^i} \; .$$

Mnohočlen $\sum_{i=0}^l b_i x^i$ je jmenovatel $f(x)$ a mnohočlen $\sum_{i=0}^k a_i x^i$ je čitatel $f(x)$.

Úloha 1.2.2. *Dokažte, že třída racionálních funkcí se shoduje s třídou funkcí, které vzniknou z konstantních funkcí $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, a z identické funkce $f(x) = x$ opakovaným použitím aritmetických operací sčítání, násobení a dělení, Odtud tyto funkce mají jméno.*

Příklad 1.2.3. *Spočtěme primitivní funkci k racionální funkci $\frac{x^2}{x^2-1}$ na libovolném intervalu $I \not\ni -1, 1$.*

Máme (s pomocí linearity a položky 4 v tvrzení 1.1.26)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-1} &= \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) = \int \left(1 + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right) \\
&= \int 1 + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} \\
&= x + \frac{\log|x-1| - \log|x+1|}{2} + c \\
&= x + \log(\sqrt{|(x-1)/(x+1)|}) + c \; .
\end{aligned}$$

□

Další příklady primitivních funkcí k racionálním funkcím jsou položky 2–4 a 10 v tvrzení 1.1.26. Ukazuje se, že takto a podobně lze spočítat primitivní funkci k libovolné racionální funkci. Pro důkaz následující věty je klíčový rozklad racionální funkce na součet jednodušších racionálních funkcí, takzvaný *rozklad na parciální zlomky*, jako je na prvním řádku předchozího výpočtu.

Věta 1.2.4 (integrace racionální funkce). *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, kde $Q(x)$ není nulový, a $I \subset \mathbb{R}$ je interval neobsahující žádný kořen polynomu $Q(x)$. Primitivní funkci*

$$F(x) = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{(na } I\text{)}$$

lze vždy vyjádřit pomocí racionálních funkcí, logaritmů a arkustangent. Podrobněji, na I

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = a(x) + \sum_{i=1}^{u} u_i \log|\kappa_i(x)| + \sum_{i=1}^{v} v_i \log(\lambda_i(x)) + \sum_{i=1}^{w} w_i \arctan(\mu_i(x))$$

pro nějakou racionální funkci $a(x)$, nějaká čísla $u, v, w \in \mathbb{N}_0$ a $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}$, nějaké monické lineární, resp. kvadratické, mnohočleny $\kappa_i(x)$, resp. $\lambda_i(x)$, a nějaké lineární mnohočleny $\mu_i(x)$ (všechny samozřejmě s reálnými koeficienty).

Ve zbytku oddílu větu skoro úplně dokážeme a popíšeme současně postup, jak $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ spočítat. „Skoro“ proto, že se opřeme o následující *Základní větu algebry*, kterou v úplnosti dokážeme až v kapitole 4 ve větě 4.2.1.

Věta 1.2.5 (ZVAlg, bez důkazu). *Pro každý nekonstantní polynom $P(x)$ s komplexními koeficienty, to jest pro $P \in \mathbb{C}[x]$ s $\deg P \geq 1$, existuje komplexní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $P(\alpha) = 0$.*

Začneme odvozením rozkladu na parciální zlomky pro obecnou racionální funkci. Ten souvisí s následující úlohou.

Příklad 1.2.6. *Dokážeme, že každou částku $n \geq 4$ korun lze rozměnit na dvoukoruny a pětikoruny.*

Máme totiž rovnosti

$$1 = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 5 \ \text{ a } \ n = \lfloor n/2 \rfloor \cdot 2 + z,\ z \in \{0, 1\}\ ,$$

kde z je zbytek při dělení čísla n dvěma. Hledaná rozměnění jsou tedy, po dosazení pravé strany první rovnosti za 1 v případu $z = 1$,

$$n = \lfloor n/2 \rfloor \cdot 2 + 0 \cdot 5 \ \text{ pro sudé } n \text{ a } \ n = (\lfloor n/2 \rfloor - 2) \cdot 2 + 1 \cdot 5 \ \text{ pro liché } n\ .$$

Díky $n \geq 4$ je $\lfloor n/2 \rfloor - 2 \geq 0$ a máme skutečné, realizovatelné rozměnění (a ne něco jako $3 = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 5$ se záporným počtem dvoukorun). □

První rovnost dělením číslem $2 \cdot 5$ převedeme na

$$\frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{-2}{5} + \frac{1}{2}\ .$$

Je to příklad rozkladu na parciální zlomky, ale v okruhu celých čísel $\mathbb{Z}$. Pro důkaz věty 1.2.4 budeme pracovat v okruhu $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \cdot, 0, 1)$ polynomů s reálnými koeficienty. Řekneme, že dva polynomy v něm jsou *nesoudělné*, pokud jejich společné dělitele v okruhu $\mathbb{R}[x]$ jsou pouze konstantní polynomy. Odvodíme obdobu první hořejší rovnosti, budeme k tomu ale potřebovat další (vedle věty 1.2.5) základní vlastnost polynomů.

Úloha 1.2.7 (dělení polynomů se zbytkem). *Nechť F je komutativní těleso, jako třeba $F = \mathbb{R}$ nebo $F = \mathbb{C}$, a $p, q \in F[x]$ s $q \neq 0$ jsou dva polynomy s koeficienty v F. Pak existují jednoznačně určené polynomy $r, s \in F[x]$, že*

$$p(x) = q(x)r(x) + s(x) \ \ \text{a} \ \ s \equiv 0 \ \vee \ \deg s < \deg q$$

— dokažte.

Tvrzení 1.2.8 (Bezoutova identita). *Pro každé dva nesoudělné polynomy $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ existují polynomy $a, b \in \mathbb{R}[x]$, že*

$$a(x)P(x) + b(x)Q(x) = 1 \; .$$

Důkaz. Uvážíme ideál

$$A = \{aP + bQ \mid a,\, b \in \mathbb{R}[x]\}$$

a v něm nenulový polynom $p \in A$ s nejmenším stupněm. Podle úlohy 1.2.7 je každý polynom v A dělitelný polynomem p beze zbytku, jinak by nenulový zbytek byl ve sporu s minimalitou $\deg p$. Tedy p dělí P i Q, oba polynomy totiž patří do A. Podle předpokladu to ale znamená, že p je konstantní. Protože A je uzavřený na konstantní násobky, můžeme vzít $p = 1 \in A$, což dokazuje uvedenou identitu. □

Polynom je *monický*, má-li vedoucí koeficient rovný 1. Monický polynom je automaticky nenulový.

Tvrzení 1.2.9 (komplexní faktorizace). *Pro každý monický komplexní polynom Q v $\mathbb{C}[x]$ platí formální identita*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i}$$

pro nějaká čísla $k \in \mathbb{N}_0$, $m_i \in \mathbb{N}$ a $\alpha_i \in \mathbb{C}$, přičemž čísla α_i jsou vzájemně různá. Toto vyjádření $Q(x)$ je jednoznačné, kromě pořadí činitelů v součinu, a nazývá se komplexní faktorizací (polynomu Q).

Důkaz. Existenci faktorizace dokážeme indukcí podle stupně $\deg Q$. Pro $\deg Q = 0$ ji máme s $k = 0$, $Q(x) = 1$. Nechť $\deg Q > 0$. Podle věty 1.2.5 vezmeme $\alpha \in \mathbb{C}$, že $Q(\alpha) = 0$. Pomocí úlohy 1.2.7 vydělíme $Q(x)$ polynomem $x - \alpha$ se zbytkem, což je konstanta. Protože $Q(\alpha) = 0$, je tato konstanta nulová a tedy $Q(x) = R(x)(x - \alpha)$, kde $R \in \mathbb{C}[x]$ je monický a má stupeň $\deg Q - 1$. Polynom $R(x)$ má komplexní faktorizaci podle indukčního předpokladu, takže celý součin včetně $(x - \alpha)$ dává komplexní faktorizaci pro $Q(x)$. Její jednoznačnost si čtenářka dokáže v úloze 1.2.10. □

Úloha 1.2.10. *Dokažte jednoznačnost komplexní faktorizace.*

Tvrzení 1.2.11 (reálná faktorizace). *Pro každý monický reálný polynom Q v $\mathbb{R}[x]$ platí formální identita*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{l} (x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^{n_i}$$

pro nějaká čísla $k, l \in \mathbb{N}_0$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ a $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, přičemž čísla α_i jsou vzájemně různá, stejně tak dvojice (β_i, γ_i), a vždy $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$. Toto vyjádření $Q(x)$ je jednoznačné, kromě pořadí činitelů v obou součinech, a nazývá se reálnou faktorizací (polynomu Q).

Důkaz. Nechť
$$Q(x)=\prod_{i=1}^{k'}(x-\alpha'_i)^{m'_i}$$
je komplexní faktorizace polynomu $Q(x)$ podle předchozího tvrzení. Aplikace komplexního sdružení $x\mapsto\overline{x}$, což je automorfismus tělesa $\mathbb{C}$, na tuto identitu a reálnost koeficientů polynomu $Q(x)$ dávají sdruženou identitu
$$\overline{Q(x)}=Q(x)=\prod_{i=1}^{k'}(x-\overline{\alpha'_i})^{m'_i}\ .$$
Vzhledem k jednoznačnosti komplexní faktorizace $Q(x)$ to znamená, že pro každý index $i\in[k']$ s $\alpha'_i\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ existuje (jednoznačně určený) index $j\in[k']$, že $j\neq i$, $\alpha'_i=\overline{\alpha'_j}$ a $m'_i=m'_j$. Čísla α'_i můžeme tedy uspořádat tak, že prvních k z nich je reálných, jsou to $\alpha_1=\alpha'_1,\dots,\alpha_k=\alpha'_k$ s násobnostmi $m_1=m'_1,\dots,m_k=m'_k$, a zbývajících $k'-k$ nereálných čísel α'_i se rozpadá na $l=\frac{k'-k}{2}$ komplexně sdružených dvojic $\alpha'_{k+1}=\overline{\alpha'_{k+2}}$, $\alpha'_{k+3}=\overline{\alpha'_{k+4}}$ atd. se shodnými násobnostmi $n_1=m'_{k+1}=m'_{k+2}$, $n_2=m'_{k+3}=m'_{k+4}$ atd. Komplexní faktorizace polynomu $Q(x)$ tak přechází v
$$\begin{aligned}Q(x)&=\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{l}((x-\alpha'_{k+2i-1})(x-\overline{\alpha'_{k+2i-1}}))^{n_i}\\&=\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{l}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{n_i}\ ,\end{aligned}$$
kde $\beta_i=-\alpha'_{k+2i-1}-\overline{\alpha'_{k+2i-1}}\in\mathbb{R}$ a $\gamma_i=\alpha'_{k+2i-1}\overline{\alpha'_{k+2i-1}}\in\mathbb{R}$. Kvadratické polynomy $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ jsou vzájemně různé (jinak by dvě různé komplexně sdružené dvojice čísel α'_i splývaly) a mají záporné diskriminanty $\beta_i^2-4\gamma_i$ (protože tyto kvadratické polynomy nemají reálné kořeny). Dostali jsme reálnou faktorizaci polynomu $Q(x)$. Její jednoznačnost plyne z jednoznačnosti výchozí komplexní faktorizace. □

Úloha 1.2.12. *Jak se faktorizují obecné, ne nutně monické, nenulové komplexní či reálné polynomy?*

Věta 1.2.13 (rozklad na parciální zlomky). *Pro každé dva reálné polynomy $P,Q\in\mathbb{R}[x]$, kde $Q(x)$ je monický, platí formální identita*
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\delta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\epsilon_{i,j}x+\theta_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}\ ,$$
kde $p\in\mathbb{R}[x]$, $k,l,m_i,n_i,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ jsou konstanty z reálné faktorizace polynomu $Q(x)$ a $\delta_{i,j},\epsilon_{i,j},\theta_{i,j}\in\mathbb{R}$ jsou další konstanty.

Důkaz. Jsou-li $R, S \in \mathbb{R}[x]$ nesoudělné polynomy, podle tvrzení 1.2.8 existují polynomy $a, b \in \mathbb{R}[x]$, že $\frac{1}{RS} = \frac{a}{R} + \frac{b}{S}$. Podle úlohy 1.2.14 z nesoudělnosti reálných polynomů R a S_1, a R a S_2, plyne nesoudělnost polynomů R a S_1S_2. Opakovaným užitím předchozí identity tak dostáváme její zobecnění:

$$R_1, R_2, \ldots, R_k \in \mathbb{R}[x] \text{ po dvou nesoudělné} \Rightarrow \text{existují } a_i \in \mathbb{R}[x], \text{ že}$$
$$\frac{1}{R_1(x)R_2(x)\ldots R_k(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(x)}{R_i(x)} \ .$$

Vezmeme reálnou faktorizaci

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{l}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{n_i} \ .$$

Patrně (úloha 1.2.15) je všech jejích $k+l$ činitelů po dvou nesoudělných. Podle zobecněné identity tak pro nějakých $k+l$ polynomů a_i, b_i v $\mathbb{R}[x]$ máme identitu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{b_i(x)}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{n_i}} \ .$$

Pomocí m_i užití úlohy 1.2.7 rozvineme $a_i(x)$ pro každé $i \in [k]$ do mocnin dvojčlenu $x - \alpha_i$:

$$\begin{array}{rcl}
a_i(x) & = & (x-\alpha_i)^{m_i} q_0(x) + r_0(x) \\
a_i(x) & = & (x-\alpha_i)^{m_i} q_0(x) + (x-\alpha_i)^{m_i-1} q_1(x) + r_1(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_i(x) & = & (x-\alpha_i)^{m_i} q_0(x) + (x-\alpha_i)^{m_i-1} q_1(x) + \cdots + (x-\alpha_i)^0 q_{m_i}(x) \ ,
\end{array}$$

kde polynomy q_j a r_j jsou buď nulové nebo splňují $\deg r_j < m_i - j$ a (tedy), pro $j \geq 1$, $\deg q_j = 0$. Obdobně rozvineme

$$b_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} (x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{n_i-j} q_j(x) \ ,$$

kde nyní pro $j \geq 1$ je polynom q_j buď nulový nebo má $\deg q_j \leq 1$. Nahradíme-li výše v $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \ldots$ polynomy $a_i(x)$ a $b_i(x)$ těmito rozvoji, dostáváme vyjádření racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uvedené ve znění věty. □

Úloha 1.2.14. *Dokažte, že když je $R \in \mathbb{R}[x]$ nesoudělný jak s $S \in \mathbb{R}[x]$ tak s $T \in \mathbb{R}[x]$, pak je R nesoudělný i se součinem ST.*

Úloha 1.2.15. *Dokažte, že dva reálné polynomy jsou nesoudělné, právě když nemají společný (komplexní) kořen.*

Třetí část hořejšího rozkladu na parciální zlomky posléze zredukujeme na následující primitivní funkci.

Tvrzení 1.2.16 (zase per partes). *Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť*

$$F_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \quad (na\ \mathbb{R})\ .$$

Pak $F_1(x) = \arctan x$ a dále

$$F_{n+1}(x) = (1 - 1/2n)F_n(x) + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}\ .$$

Takže obecně $F_n(x) = a_n \arctan x + b_n(x)$, kde $a_n \in \mathbb{Q}$ a $b_n(x)$ je racionální funkce s celočíselnými koeficienty.

Důkaz. Počáteční podmínka rekurence je položka 10 v tvrzení 1.1.26. Dále integrujeme per partes:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int \frac{x'}{(x^2+1)^n} \overset{p.\,p.}{=} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)\ . \end{aligned}$$

Po snadné úpravě dostáváme uvedenou rekurenci. □

Úloha 1.2.17. *Vypočítejte explicitně čísla a_n a racionální funkce $b_n(x)$.*

Důkaz. (Věty 1.2.4.) Po rozšíření zlomku $\frac{P(x)}{Q(x)}$ vhodnou konstantou můžeme předpokládat, že $Q(x)$ je monický. Racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozložíme na parciální zlomky podle věty 1.2.13 a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} &= \int p(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \int \frac{\delta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i} \int \frac{\epsilon_{i,j}x + \theta_{i,j}}{(x^2+\beta_i x + \gamma_i)^j} \\ &= q(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=2}^{m_i} \frac{\delta_{i,j}}{(1-j)(x-\alpha_i)^{j-1}} + \sum_{i=1}^{k} \delta_{i,1}\log|x-\alpha_i| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i} G_{i,j}(x)\ , \end{aligned}$$

kde $q \in \mathbb{R}[x]$. Zbývá spočítat primitivní funkce $G_{i,j}(x)$. Máme

$$\begin{aligned}\int \frac{\epsilon x+\theta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} &= \frac{\epsilon}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} + (\theta-\epsilon\beta/2)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} \\ &= \frac{\epsilon(x^2+\beta x+\gamma)^{1-j}}{2(1-j)}\ (j\ge 2),\ \frac{\epsilon\log(x^2+\beta x+\gamma)}{2} \\ &\quad (j=1) + (\theta-\epsilon\beta/2)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\ ,\end{aligned}$$

kde jsme první primitivní funkci spočítali pomocí prvního substitučního pravidla ve větě 1.1.29 a položek 2 a 4 v tvrzení 1.1.26. Zbývá tak už jen spočítat primitivní funkci $\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}$. Označíme $\eta = \sqrt{\gamma-\beta^2/4}$ (nezapomeňme, že $\gamma-\beta^2/4>0$) a použijeme subsituci $y=y(x)=x/\eta+\beta/2\eta$. Doplníme na čtverec a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{1/\eta}{((x/\eta+\beta/2\eta)^2+1)^j} \\ &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{y(x)'}{((x/\eta+\beta/2\eta)^2+1)^j} \\ &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^j} = \frac{F_j(y(x))}{\eta^{2j-1}}\end{aligned}$$

(opět první substituční pravidlo), s funkcemi $F_j(y)$ v tvrzení 1.2.16. Celkem je každá $G_{i,j}(x)$ rovna racionální funkci plus lineární kombinaci (s reálnými koeficienty) logaritmu z monického kvadratického trojčlenu (který nemá reálné kořeny) a arkustangenty z lineárního dvojčlenu. To spolu s předešlými členy hořejšího vyjádření primitivní funkce $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ dává výraz ve znění věty. $\Box$

Příklad 1.2.18. *Spočítáme*

$$\int \frac{1}{x^4+1}\ \textit{(na } \mathbb{R}\textit{)}\ .$$

Protože

$$x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

a $(\sqrt{2})^2-4<0$, je to reálná faktorizace polynomu x^4+1. Najdeme a,b,c,d v $\mathbb{R}$, že

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}\ .$$

Tato rovnice, v níž a,b,c,d bereme jako proměnné, je ekvivalentní s

$$\begin{aligned}1 &= (ax+b)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(cx+d)(x^2+\sqrt{2}x+1),\ \text{ tedy s} \\ 1 &= x^3(a+c)+x^2(-a\sqrt{2}+b+c\sqrt{2}+d)+ \\ &\quad +x^1(a-b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2})+x^0(b+d)\ .\end{aligned}$$

Odtud $a = -c$, $b = 1 - d$ a

$$\begin{aligned} -(-c)\sqrt{2} + (1-d) + c\sqrt{2} + d \quad &= 0 = \quad (-c) - (1-d)\sqrt{2} + c + d\sqrt{2}, \text{ tj.} \\ 2\sqrt{2}c \quad &= -1,\ \sqrt{2} = \quad 2\sqrt{2}d\ . \end{aligned}$$

Takže $d = \frac{1}{2} = b$, $c = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ a rozklad na parciální zlomky je

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right)\ .$$

Označíme si $a = \pm\sqrt{2}$, $L = \log(x^2+ax+1)$ a $b = \sqrt{1-a^2/4} = 1/\sqrt{2}$. Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{x+a}{x^2+ax+1} &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+1} + \int \frac{a/2}{x^2+ax+1} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{(x+a/2)^2+b^2} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{a}{2b}\int \frac{1/b}{(x/b+a/2b)^2+1} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{a}{2b}\arctan(x/b+a/2b)\ . \end{aligned}$$

Celkem

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1} \quad = \quad & \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) + \arctan(\sqrt{2}x+1) - \right. \\ & \left. - \arctan(\sqrt{2}x-1) \right)\ . \end{aligned}$$

□

Úloha 1.2.19. *Spočítejte*

$$\int \frac{1}{x^3+1}\ .$$

1.3 Více o primitivních funkcích

Přesně $\mathfrak{c}$ funkcí na intervalu má primitivní funkci a je to i počet diferencovatelných funkcí. Věta D. Preisse a M. Tartagliové o vzorové definovatelnosti derivací.

Jednu z prvních otázek o primitivních funkcích, jež měla být probrána asi už v předchozím oddílu a která se ptá na jejich počet, zodpovíme teď. Připomeňme si, že $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ je symbol pro mohutnost kontinua, kardinalitu množiny reálných čísel.

Věta 1.3.1 (počet derivací a antiderivací). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s kladnou délkou a*

$$\Delta(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \exists\, g : I \to \mathbb{R} :\ g' = f\}$$

je množina těch funkcí definovaných na I, které mají na I primitivní funkci. Každá konstantní funkce z I do $\mathbb{R}$ leží v $\Delta(I)$ a každá funkce v $\Delta(I)$ je limitou posloupnosti spojitých funkcí. Proto

$$|\Delta(I)| = \mathfrak{c}\ .$$

Tedy i

$$\#\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ má na } I \text{ vlastní derivaci}\} = \mathfrak{c}\ .$$

Důkaz. Každá konstantní funkce má primitivní funkci a jejich množina jednoznačně odpovídá $\mathbb{R}$, takže $|\Delta(I)| \ge \mathfrak{c}$. Když přijememe druhé tvrzení věty, máme pro každou $f \in \Delta(I)$ takovou posloupnost spojitých funkcí (f_n), $f_n : I \to \mathbb{R}$, že pro každé $x \in I$ je $\lim f_n(x) = f(x)$. Spočetná množina

$$M_f = \{(n,\, y,\, u,\, v) \mid n \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Q} \cap I,\ u,\, v \in \mathbb{Q},\ u < f_n(y) < v\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^3$$

pak jednoznačně určuje f (úloha 1.3.2). Tedy

$$|\Delta(I)| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}^3)| = \mathfrak{c}$$

a celkem $|\Delta(I)| = \mathfrak{c}$ (úloha 1.3.3). Podle tvrzení 1.1.3 má každá $f \in \Delta(I)$ přesně $\mathfrak{c}$ primitivních funkcí, takže poslední množina ve znění věty má mohutnost také $\mathfrak{c} \cdot |\Delta(I)| = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ (úloha 1.3.4).

Zbývá ještě dokázat, že každá derivace $f' \in \Delta(I)$ je bodovou limitou spojitých funkcí. To plyne z definice derivace v bodě a spojitosti diferencovatelné funkce. Rozlišíme tři případy podle pravého konce intervalu I: a) $\sup(I) = +\infty$, b) $b = \sup(I) \in I$ a c) $\mathbb{R} \ni b = \sup(I) \notin I$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in I$. V a) klademe $f_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$, v b) stejně tak, ale nejprve funkci $f(y)$ spojitě rozšíříme pro $y \ge b$ lineárně se směrnicí $f'_-(b)$ a v c) klademe

$$f_n(x) = \frac{f(x + (b-x)/(n+1)) - f(x)}{(b-x)/(n+1)}\ .$$

Tyto funkce jsou definované na I a spojité a není těžké vidět, že pro každé $x \in I$ je $\lim f_n(x) = f'_{(\pm)}(x)$. □

Úloha 1.3.2. *Proč M_f jednoznačně určuje f?*

Úloha 1.3.3. *Co přesně znamenají nerovnosti $|\Delta(I)| \ge \mathfrak{c}$ a $|\Delta(I)| \le \mathfrak{c}$ a jak z nich plyne rovnost $|\Delta(I)| = \mathfrak{c}$?*

Úloha 1.3.4. *Ukažte, že pro každou nekonečnou množinu M platí $|M \times M| = |M|$.*

V následující definici a větě budeme pro stručnost „funkcemi“ rozumět funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Definice 1.3.5 (vzorově určené funkce). *Řekneme, že množina funkcí $\mathcal{F}$ je vzorově určená, když pro každou funkci f mimo $\mathcal{F}$ existuje množina $E \subset \mathbb{R}$, že pro každou $g \in \mathcal{F}$ je $f^{-1}(E) \neq g^{-1}(E)$. O funkci f řekneme, že vzorově patří do $\mathcal{F}$, když pro každou množinu $E \subset \mathbb{R}$ existuje funkce $g \in \mathcal{F}$, že $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$.*

Pro vzorově určenou množinu funkcí $\mathcal{F}$ tedy dokážeme rozhodnout o náležení funkce do $\mathcal{F}$ jen podle vzorů $V = \{f^{-1}(E) \mid E \subset \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}\}$: pro každou funkci f platí, že

$$f \in \mathcal{F} \iff \forall\, E \subset \mathbb{R} : \ f^{-1}(E) \in V \ .$$

Úloha 1.3.6. *Dokažte, že množina všech omezených funkcí není vzorově určená.*

Úloha 1.3.7. *Dokažte, že množina všech darbouxovských funkcí (což jsou funkce nabývající všechny mezihodnoty) není vzorově určená.*

Věta 1.3.8 (D. Preiss a M. Tartaglia, 1995). *Množina Δ skládající se z funkcí s primitivní funkcí je vzorově určená.*

Plyne to z obecnějšího výsledku: splňuje-li množina funkcí $\mathcal{F}$ tři následující podmínky, je vzorově určená.

1. *Platí, že $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$.*
2. *Obraz každé nekonstantní funkce v $\mathcal{F}$ má kardinalitu $\mathfrak{c}$.*
3. *Obraz každé nekonstantní funkce f tvaru $f = g - h$, kde $g, h \in \mathcal{F}$, má kardinalitu $\mathfrak{c}$.*

Důkaz. Ověříme, že Δ splňuje podmínky 1–3. Podle věty 1.3.1 je $|\Delta| = \mathfrak{c}$ a 1 platí. Pokud funkce $f \in \Delta$ není konstantní, její obraz je podle věty 1.1.17 interval s kladnou délkou, jenž má mohutnost $\mathfrak{c}$, a 2 platí. Z linearity derivování vyplývá $g, h \in \Delta \Rightarrow g - h \in \Delta$, takže platí i 3.

Zbývá tak větu dokázat pro obecnou rodinu funkcí $\mathcal{F}$ splňující 1–3. V prvním kroku dokážeme první lemma. *Když funkce $g \notin \mathcal{F}$ vzorově patří do $\mathcal{F}$ a $h \in \mathcal{F}$, pak existuje funkce $f \in \mathcal{F}$ a množina $S \subset \mathbb{R}$, že $f \neq h$, $|S| < \mathfrak{c}$ a*

$$x \in \mathbb{R} \setminus (g^{-1}(S) \cap f^{-1}(S)) \Rightarrow g(x) = f(x) \ .$$

Pro důkaz prvního lemmatu

V druhém kroku dokážeme druhé lemma. *Když g je funkce, $f, h \in \mathcal{F}$ jsou nekonstantní funkce a množiny $U, T \subset \mathbb{R}$ s mohutnostmi menšími než $\mathfrak{c}$ splňují*

$$x \in \mathbb{R} \setminus (g^{-1}(S) \cap f^{-1}(S)) \Rightarrow g(x) = f(x)$$

a

$$x \in \mathbb{R} \setminus (g^{-1}(T) \cap h^{-1}(T)) \Rightarrow g(x) = h(x) \ ,$$

pak $f = h$.

Pro důkaz druhého lemmatu

Nyní už můžeme dokázat, že $\mathcal{F}$ je vzorově určená.

□

Jedním z autorů věty je český matematik *David Preiss (1947)* (od r. 1990 působí ve Velké Británii, nejprve na University College London a pak na Univerzitě ve Warwicku.)

Úloha 1.3.9. *Dokažte, že množina* Δ_b *omezených derivací je vzorově určená.*

1.4 Liouvilleova věta

Diferenciální těleso. Identita pro logaritmickou derivaci. Algebraické a transcendentní prvky. Adjunkce prvku. Exponenciála, logaritmus a antiderivace. Elementární rozšíření. Abstraktní Liouvilleova věta. Meromorfní funkce, tvoří diferenciální těleso.

Abychom přesně řekli, co je vyjádření funkce vzorcem, a abychom přesně dokázali větu 1.1.34, vydáme se cestou diferenciální algebry.

Definice 1.4.1 (diferenciální těleso a konstanty). *Diferenciální těleso je dvojice* $(F, ')$, *kde* $F = (F, +, \cdot, 0_F, 1_F)$ *je těleso (viz MA I [5]) a* $(\cdot)' \colon F \to F$, $x \mapsto x'$, *je lineární zobrazení splňující Leibnizovu identitu: pro každé dva prvky* $x, y \in F$ *je*

$$(x + y)' = x' + y' \ \text{ a } \ (xy)' = x'y + xy' \ .$$

Toto zobrazení se nazývá derivací (na tělese F*) a prvky* $x \in F$ *s* $x' = 0_F$ *se nazývají konstantami (diferenciálního tělesa* F*).*

Tělesem zde vždy rozumíme komutativní těleso s charakteristikou 0.

Úloha 1.4.2. $(F, ')$ *buď diferenciální těleso. Pak* $0'_F = 0_F$. *Pro každé* $n \in \mathbb{Z}$ *a každé nenulové* $a \in F$ *se* $(a^n)' = n_F a^{n-1}$. *Dále*

$$a,\, b \in F,\, b \neq 0_F \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \ .$$

Úloha 1.4.3. *Konstanty v diferenciálním tělese tvoří podtěleso.*

Úloha 1.4.4 (identita pro logaritmickou derivaci). *Je-li* $(F, ')$ *diferenciální těleso a* $a_1, a_2 \ldots, a_n \in F$ *jsou nenulové prvky, potom*

$$\frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)'}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a'_i}{a_i} \ .$$

Na každém tělese K máme triviální derivaci $x' = 0_K$, jejíž konstanty zahrnují celé K.

Jsou-li K a L tělesa s $K \subset L$, obrat *rozšíření těles* $K \subset L$ znamená, že nejenom je K podmnožinou L, ale obě tělesa mají i shodné neutrální prvky a obě aritmetické operace v L se po zúžení na K shodují s operacemi v K. Řekneme také, že K *je podtěleso tělesa* L

Úloha 1.4.5. *Ukažte, že když $K \subset L$ a $L \subset M$ jsou rozšíření těles, pak i $K \subset M$ je rozšíření těles.*

Jsou-li $K = (K, ')$ a $L = (L, \partial)$ diferenciální tělesa a $K \subset L$ je rozšíření těles, jde o *rozšíření diferenciálních těles*, pokud se navíc derivace ∂ po zúžení na K rovná derivaci $'$. Mluvíme též o *diferenciálním podtělese.* Tranzitivita v úloze 1.4.5 platí i pro rozšíření diferenciálních těles.

Definice 1.4.6 (algebraické a transcendentní prvky). *Nechť $K \subset L$ je rozšíření těles. Prvek $a \in L$ je algebraický nad K, když existují prvky $c_0, c_1, \ldots, c_n$ v K, $n \in \mathbb{N}_0$ a $c_n \neq 0_K$, že*

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_n a^n = 0_L = 0_K\ .$$

Stručněji napsáno, existuje nenulový polynom $p \in K[x]$ s koeficienty v K, jehož je a kořenem. Není-li prvek $a \in L$ nad K algebraický, nazývá se transcendentním nad K.

Definice 1.4.7 (adjunkce prvku). *Nechť $K \subset L$ je rozšíření těles a $t \in L$. Definujeme dvě podmnožiny tělesa L,*

$$K[t] = \{p(t) \mid p \in K[x]\} \quad a \quad K(t) = \{p(t)/q(t) \mid p,\, q \in K[x],\, q(t) \neq 0_L\}\ .$$

První množina sestává z lineárních kombinací mocnin (s nezápornými exponenty) prvku t s koeficienty v K. Druhá se skládá ze zlomků (podílů) prvků v $K[t]$.

Úloha 1.4.8. *Pro jaká t můžeme v předchozí definici $K(t)$ poslední podmínku ekvivalentně přepsat jako: $q(x)$ je nenulový mnohočlen?*

Úloha 1.4.9. *Dokažte, že $K(t)$ je nejmenší podtěleso tělesa L, které obsahuje množinu $K \cup \{t\}$.*

Příklad 1.4.10. *Libovolné těleso K rozšíříme do diferenciálního tělesa $(K(x), ')$ s prvkem x transcendentním nad K a konstantami K.*

Těleso $K(x) = Z/\!\sim$ je tvořeno třídami ekvivalence relace $\sim$ na množině

$$Z = \{p(x)/q(x) \mid p,\, q \in K[x],\, q \not\equiv 0_K\}$$

zlomků (čili uspořádaných dvojic) $p(x)/q(x)$ formálních mnohočlenů $p(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k x^k$, $a_i \in K$, $k \in \mathbb{N}_0$ a $a_k \neq 0_k$ (chápaných jako $l = k + 1$-tice

$(a_0, a_1, \dots, a_{l-1}) \in K^l$, $l \in \mathbb{N}_0$, kde pro $l = 0$ prázdná l-tice odpovídá identicky nulovému mnohočlenu) a relace ekvivalence $\sim$ je dána jako

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sim \frac{r(x)}{s(x)} \iff p(x)s(x) - r(x)q(x) = 0_K$$

(úloha 1.4.11). $K(x)$ je vlastně formálně brané těleso racionálních „funkcí“ nad K. Derivaci $'\colon K(x) \to K(x)$ na něm definujeme tak, že požadujeme $a' = 0_K$ pro každé $a \in K$ a $x' = 1_K$. Abstraktní definice derivace pak dává jednoznačnou hodnotu $r(x)'$ pro každou $r \in K(x)$: pro $p, q \in K[x]$ je

$$p(x)' = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k)' = a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1}$$

($= 0_K$ pro $k = 0$) a

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p(x)'q(x) - p(x)q(x)'}{q(x)^2}$$

(úloha 1.4.12). $\square$

Úloha 1.4.11. *Co přesně znamená rovnost $p(x)s(x) - r(x)q(x) = 0_K$ v definici $\sim$? Jak přesně počítáme s formálními polynomy?*

Úloha 1.4.12. *Ověřte, že výše definované zobrazení $'\colon K(x) \to K(x)$ je derivace na tělese $K(x)$.*

Definice 1.4.13 (exp, log a antiderivace). *Nechť $(F, ')$ je diferenciální těleso s prvky $b, c \in F$. Když platí vztah*

$$b = c' ,$$

nazývá se c antiderivací prvku b (a b pak je derivací c). Když platí vztah

$$b' = \frac{c'}{c}$$

($c \neq 0_F$), nazývá se b logaritmem prvku c, psáno $b = \log c$, a c se nazývá exponenciálou b, psáno $c = e^b$.

Exponenciála a logaritmus jsou v diferenciální algebře zavedené abstraktně pouze svými diferenciálními vlastnostmi.

Definice 1.4.14 (elementární rozšíření). *Rozšíření diferenciálních těles*

$$F \subset G$$

se nazývá elementární, lze-li větší těleso získat z menšího postupným přidáváním algebraických prvků, logaritmů a exponenciál. Existuje tedy taková posloupnost prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$ v G, $n \in \mathbb{N}_0$, že odpovídající posloupnost těles

$$F_0 = F,\ F_i = F_{i-1}(a_i),\ i = 1, 2, \dots, n ,$$

končí v $F_n = G$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je prvek a_i algebraický nad F_{i-1} nebo je logaritmem prvku z F_{i-1} nebo je exponenciálou prvku z F_{i-1}.

V elementárním rozšíření pak prvky v G bereme jako vyjádřené vzorcem z prvků v F. Toto je tedy formalizace pojmu „ vyjádřit vzorcem“ v diferenciální algebře.

Teď už jsme s to přesně uvést abstraktní zobecnění Liouvilleovy věty 1.1.34 a pak jako jeho důsledek její přímou abstraktní verzi.

Věta 1.4.15 (abstraktní obecná Liouvilleova věta). *Nechť $F \subset G$ je elementární rozšíření diferenciálních těles, přičemž G má stejné konstanty jako F, a prvek $a \in F$ má antiderivaci v G. Pak existují konstanty $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, a prvky $c_1, c_2, \ldots, c_n, d$ v F, že*

$$a = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{c_i'}{c_i} + d' \ .$$

Důsledek 1.4.16 (abstraktní Liouvilleova věta). *$F \subset G$ buď elementární rozšíření diferenciálních těles, přičemž G má stejné konstanty jako F, a pro f, g v F prvek*

$$fe^g \ ,$$

kde $e^g \in G$ je transcendentní nad F, měj antiderivaci v G. Pak existuje prvek $a \in F$, že

$$f = a' + ag' \ .$$

Důkazy poslední věty a jejího důsledku, pro něž budeme potřebovat další výsledky z algebry, na (ne úplně krátký) čas odložíme, abychom se vrátili k reálným funkcím. Ukážeme, jak důsledek 1.4.16 dává větu 1.1.34 a že „vyjádření vzorcem“ definované elementárním diferenciálním rozšířením zachycuje jeho intuitivní podobu pro reálné funkce.

Budeme muset pracovat ne pouze s reálnými funkcemi, ale obecněji s funkcemi s komplexními hodnotami, typu

$$f\colon I \setminus X \to \mathbb{C} \ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený neprázdný interval s vyňatou diskrétní množinou X. Množina $X \subset I$ je *diskrétní v I*, když v I nemá hromadné body, pro každé $a \in I$ existuje $\delta > 0$, že průnik $X \cap (a - \delta, a + \delta)$ je konečný. Derivací takové funkce rozumíme obvyklou derivaci

$$f'\colon I \setminus X \to \mathbb{C},\ f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(funkce, které budeme uvažovat, budou mít derivaci všude). Ze ZS víme, že obvyklá derivace vyhovuje abstraktní definici, je to lineární zobrazení splňující Leibnizovu identitu. Exponenciála nyní zachycuje goniometrické funkce,

$$\sin x = (1/2i)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \quad \text{a} \quad \cos x = (1/2)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right),\ x \in \mathbb{R} \ \text{ a } \ i = \sqrt{-1}\ ,$$

a pro používání komplexních čísel jsou i další dobré algebraické důvody. Nyní definujeme dostatečně širokou třídu takových funkcí, v níž bude pohodlné se pohybovat. Mají *Laurentovy rozvoje (se středem a)*, rozvoje $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ s $a_n \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ a tedy s konečně mnoha mocninami se zápornými exponenty.

Definice 1.4.17 (meromorfní funkce). *Pro daný otevřený neprázdný interval $I \subset \mathbb{R}$ a v něm diskrétní množinu $X \subset I$ řekneme, že funkce f je meromorfní na I (s vyňatou X), pokud*

$$f\colon I \setminus X \to \mathbb{C}$$

a pro každé $a \in I$ existují reálné $\delta > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ s $n \geq k$, že pro každé $x \in (I \setminus X) \cap (a - \delta, a + \delta)$ platí rovnost

$$f(x) = \sum_{n,\, n \geq k} a_n (x - a)^n \ .$$

Meromorfní funkce f tedy je na celém I lokálně součtem Laurentových řad. Jako

$$M(I)$$

označíme množinu funkcí f meromorfních na I (pro některou vyňatou a v I diskrétní množinu X, závisející na f).

Například $f(x) = \frac{1}{x}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je meromorfní na $\mathbb{R}$ (s vyňatou $\{0\}$). Pro $a = 0$ rozvoj $f(x) = \frac{1}{x} = (x - 0)^{-1}$ platí pro celý definiční obor. Pro $a \neq 0$ máme rozvoje

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + a^{-1}(x - a)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a^{-n-1} (x - a)^n$$

platné pro $|x - a| < |a|$. Funce $f(x) = e^{1/x}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je meromorfní na $(-\infty, 0)$ i na $(0, +\infty$ (s vyňatou $X = \emptyset$), ale nikoli na $\mathbb{R}$ (s vyňatou $X = \{0\}$), protože f nemá Laurentův rozvoj se středem $a = 0$. Funkce

$$\frac{\log x}{\sin(\pi x)}\colon (0,\, +\infty) \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

je meromorfní na $(0,\, +\infty)$ (s vyňatou $X = \mathbb{N}$).

Ukážeme, že racionální funkce $\mathbb{C}(x)$ jsou meromorfní na $\mathbb{R}$ a že $M(I)$ je diferenciální těleso. Racionální funkce $\mathbb{C}(x)$ nyní narozdíl od příkladu 1.4.10 bereme „neformálně“ jako funkce, podle definice 1.2.1, ale s $a_i, b_i \in \mathbb{C}$.

Tvrzení 1.4.18 (o $\mathbb{C}(x)$). *Je $\mathbb{C}(x) \subset M(\mathbb{R})$. Racionální funkce $\mathbb{C}(x)$ spolu s obvyklými operacemi a obvyklou derivací tvoří diferenciální těleso.*

Důkaz. Nechť $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i / \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ s $k, l \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ a $a_k b_l \neq 0_K$ je racionální funkce. Jako X označíme (konečnou) množinu kořenů jejího jmenovatele. Ukážeme, že $f(x)$ je meromorní na $\mathbb{R}$ (s vyňatou X). Pro popis rozvoje funkce f se středem v $a \in \mathbb{R}$ rozlišíme dva případy podle náležení a do X.

Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus X$. Oba polynomy v $f(x)$ rozvineme do mocnin dvojčlenu $x - a$ a jejich koeficienty pak označíme opět a_i a b_i. Pak ovšem $b_0 \neq 0$ a, označíme-li jako $p(x)$ čitatele a $r(x) = (b_1/b_0)(x-a) + \cdots + (b_l/b_0)(x-a)^l$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i=0}^k a_i(x-a)^i}{\sum_{i=0}^l b_i(x-a)^i} \\ &= \frac{p(x)}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + (b_1/b_0)(x-a) + \cdots + (b_l/b_0)(x-a)^l} \\ &= \frac{p(x)}{b_0} \sum_{n\ge 0} (-1)^n r(x)^n \ . \end{aligned}$$

Pro x blízko u a je $|r(x)| < 1$ a řada absolutně konverguje. Rozvinutím mocnin $r(x)^n$, vynásobením $p(x)/b_0$ a přerovnáním pak dostáváme pro $f(x)$ rozvoj (do mocninné řady) se středem a.

Nechť $a \in X$ a a má ve jmenovateli jako kořen násobnost $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le l$. Podobně jako v předešlém případu přechodem k mocninám dvojčlenu $x - a$ máme, s $p(x)$ jako dříve a $r(x) = (b_{m+1}/b_m)(x-a) + \cdots + (b_l/b_m)(x-a)^{l-m}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i=0}^k a_i(x-a)^i}{\sum_{i=0}^l b_i(x-a)^i} \\ &= \frac{p(x)}{b_m(x-a)^m} \cdot \frac{1}{1 + (b_{m+1}/b_m)(x-a) + \cdots + (b_l/b_m)(x-a)^{l-m}} \\ &= \frac{p(x)}{b_m(x-a)^m} \sum_{n\ge 0} (-1)^n r(x)^n \ . \end{aligned}$$

Pro x blízko u a je opět $|r(x)| < 1$ a řada absolutně konverguje. Rozvinutím mocnin $r(x)^n$, vynásobením $p(x)/b_m(x-a)^m$ a přerovnáním pak dostáváme pro $f(x)$ Laurentův rozvoj se středem a.

Asi není nutné explicitně vypisovat aritmetické operace, vůči nimž racionální funkce $\mathbb{C}(x)$ tvoří těleso, a obvyklou derivaci $'$ jsme už výše uvedli. Podle výsledků v ZS je $(\mathbb{C}(x), ')$ diferenciální těleso. $\square$

Úloha 1.4.19. *Nebylo by možné oba případy předešlého důkazu sloučit v jeden?*

Teď dokážeme mnohem obecněji, že každá množina $M(I)$ je přirozeným způsobem diferenciální těleso. Není to zase tak přímočarý výsledek, jak některé výklady Liouvilleovy věty v literatuře sugerují. Budeme potřebovat větu o jednoznačnosti mocninných řad, kterou jsme v *MA I* [5] dokázali a kterou teď připomeneme a zobecníme v následujících dvou úlohách.

Úloha 1.4.20. *Nechť $\delta > 0$ je reálné číslo, $(b_n) \subset (-\delta, \delta)$ je posloupnost nenulových čísel jdoucí k 0, řada*

$$f(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$$

s $a_n \in \mathbb{C}$ konverguje (absolutně) na $(-\delta, \delta)$ a $f(b_n) = 0$ pro každé n. Dokažte, že pak $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Úloha 1.4.21. *Nechť $\delta > 0$ je reálné číslo, $(b_n) \subset (-\delta, \delta)$ je posloupnost nenulových čísel jdoucí k 0, Laurentova řada*

$$f(x) = \sum_{n \ge k} a_n x^n$$

s $k \in \mathbb{Z}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ konverguje (absolutně) na $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ a $f(b_n) = 0$ pro každé n. Dokažte, že pak $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ s $n \ge k$.

Důsledek 1.4.22 (o nulové merom. funkci). *Když funkce f v $M(I)$, která má vyňatou množinu X, splňuje*

$$f(b_n) = 0$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ pro nějakou posloupnost $(b_n) \subset I \setminus X$ s $\lim b_n = b \in I$, pak f je identicky nulová funkce.

Důkaz. Nechť $Y = \{x \in I \setminus X \mid f(x) = 0\}$ a

$$A = \{J \subset I \mid J \setminus X \subset Y \text{ a } J \text{ je neprázdný otevřený interval}\} .$$

Ukážeme, že $I \in A$. Podle předpokladu a úloh 1.4.20 a 1.4.21 existuje $\delta > 0$, že $(b - \delta, b + \delta) \in A$. Uspořádání $(A, \subset)$ je neprázdné a splňuje předpoklady Zornova lemmatu (úloha 1.4.23). Nechť $J \in A$ je maximální prvek. Ukážeme, že $J = I$. □

Úloha 1.4.23 (Zornovo lemma). *Odvoďte z axiomu výběru Zornovo lemma: Je-li $(P, \le)$ takové uspořádání, kde pro každý řetězec $Q \subset P$ (tj. $a, b \in Q \Rightarrow a \le b \vee b \le a$) existuje prvek $r \in P$, že pro každé $q \in Q$ je $q \le r$, potom existuje prvek $s \in P$, že pro žádné $t \in P$ není $s < t$, takže s je maximální prvek v P.*

Věta 1.4.24 (o $M(I)$). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený neprázdný interval. Množina $M(I)$ funkcí meromorfních na I spolu s obvyklými aritmetickými, bodově definovanými, operacemi a obvyklou derivací tvoří diferenciální těleso.*

Důkaz. Konstantní funkce 0 a 1 jsou triviálně v $M(I)$. Dokážeme, že $M(I)$ je uzavřená na součty, součiny a na derivaci. Nechť $f, g \in M(I)$ — lze předpokládat, že vyňatá diskrétní množina X je společná oběma funkcím (úloha 1.4.25), $a \in I$ a $f(x) = \sum_{n \ge k} a_n (x-a)^n$ a $g(x) = \sum_{n \ge l} b_n (x-a)^n$ jsou Laurentovy rozvoje obou funkcí, platné pro $x \in (I \setminus X) \cap (a - \delta, a + \delta)$. Pak

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{n \ge \min(k,l)} (a_n + b_n)(x-a)^n \ , \\ f(x)g(x) &= \sum_{n \ge k+l} \left(\sum_{i \ge k,\, j \ge l,\, i+j=n} a_i b_j \right) (x-a)^n \end{aligned}$$

(v první rovnici nedefinované a_n a b_n bereme jako 0) a

$$f'(x) = \sum_{n \geq k-1} (n+1)a_n(x-a)^n$$

(pro $k = 0$ sčítáme stále přes $n \geq 0$) jsou po řadě Laurentovy rozvoje součtové funkce $f + g$, součinové funkce fg a derivace f', platné pro $x \in (I \setminus X) \cap (a - \delta, a + \delta)$ (úloha 1.4.26).

Zbývá dokázat, že $M(I)$ je uzavřená na podíly. Nechť $f, g \in M(I)$, kde $g \neq 0_{M(I)}$ a f a g opět mají společnou vyňatou množinu X. Ukážeme, že $f/g \in M(I)$. K tomu je třeba ukázat, že množina

$$Z = \{x \in I \setminus X \mid g(x) = 0\}$$

je diskrétní. Kdyby tomu tak nebylo, existuje posloupnost $(b_n) \subset I \setminus X$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$, že $g(b_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. □

Úloha 1.4.25. *Proč pro dvě funkce $f, g \in M(I)$ můžeme vzít společnou vyňatou množinu X?*

Úloha 1.4.26. *Dokažte, že hořejší rozvoje pro součet, součin a derivaci platí ve stejném oboru, jako pro původní funkce.*

Tvrzení 1.4.27 (vnoření dif. těles). *I a J, $J \subset I \subset \mathbb{R}$, buďte dva neprázdné otevřené intervaly. Zobrazení*

$$F\colon M(I) \to M(J),\ F(f) = f \mid J\ ,$$

které zužuje funkci f na interval J, je vnoření diferenciálních těles, injektivní homomorfismus mezi diferenciálními tělesy. Jeho prostřednictvím chápeme $M(I)$ jako diferenciální podtěleso tělesa $M(J)$ a $M(I) \subset M(J)$ jako rozšíření diferenciálních těles.

Důkaz.

□

Věta 1.4.28 (elementární rozšiřování $M(I)$). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval.*

1. *Pro každou $(n+1)$-tici funkcí $f_0, f_1, \ldots, f_n \in M(I)$, $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \neq 0_{M(I)}$, existuje neprázdný otevřený podinterval $J \subset I$ a funkce f meromorfní na J (s vyňatou $X = \emptyset$), že v tělese $M(J)$ platí vztah*

$$f_0 + f_1 f + f_2 f^2 + \cdots + f_n f^n = 0_{M(J)}\ .$$

2. *Pro každou nenulovou* $g \in M(I)$ *existuje neprázdný otevřený podinterval* $J \subset I$ *a funkce* f *meromorfní na* J *(s vyňatou* $X = \emptyset$*), že v diferenciálním tělese* $M(J)$ *platí vztah*

$$f = \log g, \quad \textit{to jest} \;\; f' = \frac{g'}{g} \; .$$

3. *Pro každou* $g \in M(I)$ *existuje neprázdný otevřený podinterval* $J \subset I$ *a funkce* f *meromorfní na* J *(s vyňatou* $X = \emptyset$*), že v diferenciálním tělese* $M(J)$ *platí vztah*

$$f = e^g, \quad \textit{to jest} \;\; g' = \frac{f'}{f} \; .$$

Důkaz.

□

1.5 Poznámky a další úlohy

Oddíl 1.1. Zmíněným výsledkům J. Liouvillea o počtech vyjádření čísel pomocí součtů čtverců se věnuje kniha [21] K. S. Williamse.

Oddíl 1.3.

Věta 1.3.8 a její důkaz jsou převzaté z článku [13] D. Preisse a M. Tartagliové.

Oddíl 1.4.

Další úlohy

Úloha 1.5.1. *Spočítejte*

$$\int \frac{2x}{x^3 - 8} \; .$$

Kapitola 2

Integrály

Riemannův integrál

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\ dx$$

funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, přes kompaktní interval, jehož základní vlastnosti uvádíme v oddílu 2.1, je rigorózní definicí plochy útvaru $U(a,b,f)$ pod grafem funkce f. Následující oddíl 2.2 ho rozšiřuje na libovolný, ne nutně kompaktní, interval. Dokážeme obecnou identitu, jejímž speciálním případem je například rovnost

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+\sin x)e^{-x} - (1+\sin(2x))e^{-2x}}{x}\ dx = \log 2\ .$$

V oddílu 2.3 rozšíříme Riemannův integrál jiným směrem, na funkce několika proměnných. Hlavním výsledkem tu je verze Fubiniovy věty, která se zabývá změnou pořadí integračních proměnných. Ještě jiné zobecnění $\int_a^b f(x)\, dx$ uvádíme v oddílu 2.4: na $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ pro dvě funkce $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tak zvaný Riemannův–Stieltjesův integrál. Pro něj rozdíl mezi diskrétními součty a integrály mizí:

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)\ d\lfloor x \rfloor\ .$$

Úplně první byl ale v 17. století Newtonův integrál, který spočívá pouze v inverzním derivování. Je důležitý z praktického hlediska a probereme ho v oddílu 2.5. Aplikacím intergrálů věnujeme oddíl 2.6. Uvádíme v něm například dva důkazy Stirlingovy formule

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

pomocí integrálů — úplně pro ně stačí ten Newtonův. Poslední dva oddíly 2.7 a 2.8 zavádějí dva další integrály (a ještě o dalších se zmíníme v oddílu 2.9), oba daleko mocnější než Riemannův, totiž Henstockův–Kurzweilův a Lebesgueův.

2.1 Riemannův integrál

Dělení intervalu, jeho norma a dělení s body. Různé jim příslušející součty. Dvě definice Riemannova integrálu. Neomezená funkce ho nemá.

Zavedeme dva typy dělení intervalů a dva typy jim odpovídajících součtů. Délku intervalu označujeme absolutní hodnotou.

Definice 2.1.1 (dělení intervalu a jeho norma). *Pro $k \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ nazveme $(k+1)$-tici $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ reálných čísel dělením intervalu $[a, b]$, pokud*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \;.$$

Budeme používat značení $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Normou dělení $\lambda(D) \in (0, +\infty)$ rozumíme

$$\lambda(D) = \max_{1 \le i \le k-1} |I_i| = \max_{1 \le i \le k-1} (a_{i+1} - a_i) \;,$$

maximální délku podintervalu I_i.

Definice 2.1.2 (dolní a horní součet). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $[a, b]$. Číslům*

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \inf_{x \in I_i} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

a

$$S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \sup_{x \in I_i} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

říkáme dolní a horní součet (pro funkci f a dělení D). Tyto hodnoty jsou vždy definované (úloha 2.1.3).

Úloha 2.1.3. *Proč jsou dolní a horní součty vždy definované?*

Definice 2.1.4 (dělení s body). *Pro $k \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ nazveme dvojici (D, C) dělením intervalu $[a, b]$ s body, je-li*

$$D = (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_k)$$

dělení intervalu $[a, b]$ a

$$C = (c_0,\, c_1,\, \ldots,\, c_{k-1})$$

je k-tice reálných čísel splňující $c_i \in I_i = [a_i, a_{i+1}]$ pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Definice 2.1.5 (riemannovský součet). *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$ *s* $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* (D,C), $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ *a* $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1})$, *je dělení intervalu* $[a,b]$ *s body. Číslu*

$$R(f,\, D,\, C) = \sum_{i=0}^{k} |I_i| f(c_i) = \sum_{i=0}^{k} (a_{i+1} - a_i) f(c_i) \in \mathbb{R}$$

říkáme riemannovský součet (pro funkci f *a dělení s body* (D,C)*).*

Součty $s(f,D)$, $S(f,D)$ a $R(f,D,C)$ jsou aproximace plochy $U(a,b,f)$ plochami stupňovitých útvarů složených z obdélníků se základnami I_i a s výškami rovnými po řadě infimu f na I_i, supremu f na I_i, a $f(c_i)$ pro nějaký vzorkový bod c_i ležící v I_i.

Následující definici zavedl B. Riemann (pro trochu informací o něm viz [5]).

Definice 2.1.6 (1. definice Riemannova integrálu). *Řekneme, že funkce*

$$f:\ [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

má na intervalu $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ *s* $a < b$, *Riemannův integrál* $I \in \mathbb{R}$, *pokud pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$, *že pro každé dělení* (D,C) *intervalu* $[a,b]$ *s body*

$$\lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f,\, D,\, C)| < \varepsilon\ .$$

Požaduje se tedy $I \in \mathbb{R}$, nevlastní hodnoty $\pm\infty$ nejsou povoleny. Pokud takové číslo I existuje, píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f$$

a řekneme, že f je *riemannovsky integrovatelná* na intervalu $[a,b]$. Třídu všech riemannovsky integrovatelných funkcí označíme jako

$$\mathcal{R}(a,b) := \{f \mid f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a,\, b]\}\ .$$

První definici Riemannova integrálu lze shrnout vzorcem

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda(D)\to 0} R(f,\, D,\, C) \in \mathbb{R}\ .$$

Limitu zde chápeme ve smyslu definice 2.1.6, jako symbol jsme definovali jen limitu posloupnosti a limitu funkce v bodě.

Úloha 2.1.7. *Dokažte, že pro neomezenou funkci* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *její integrál* $\int_a^b f$ *podle definice 2.1.6 neexistuje.*

Druhá (ekvivalentní) definice Riemannova integrálu používá dolní a horní integrály a náleží J.-G. Darbouxovi.

Definice 2.1.8 (dolní a horní integrál). *Pro funkci* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$*, kde* $a<b$ *jsou reálná čísla, její dolní integrál na* $[a,b]$ *definujeme jako*

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(\{s(f,D)\mid D \textit{ je dělení } [a,\,b]\}) \in \mathbb{R}^*$$

a horní integrál jako

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf(\{S(f,D)\mid D \textit{ je dělení } [a,\,b]\}) \in \mathbb{R}^*\;.$$

Tyto hodnoty jsou vždy definované.

Suprema a infima zde bereme z podmnožin $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, tedy třeba $\inf(\{+\infty\}) = +\infty$ (příklad funkce f, kde toto nastává, bude za chvilku). Připomeňme si, je to jedna úloha v [5], že každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ má infimum i supremum. Později dokážeme, že vždy

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f\;.$$

Nastává-li rovnost a společná hodnota je konečná, dostáváme jinou definici Riemannova integrálu.

Definice 2.1.9 (2. definice Riemannova integrálu). *Funkce* $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ *má na intervalu* $[a,b]$*,* $a,b\in\mathbb{R}$ *s* $a<b$*, Riemannův integrál, pokud*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}\;.$$

Riemannův integrál funkce f *na intervalu* $[a,b]$ *je pak tato společná hodnota a značíme ho*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx\;.$$

Později dokážeme ekvivalenci obou definic, definují tutéž třídu riemannovsky integrovatelných funkcí a dávají tutéž hodnotu Riemannova integrálu, je-li definován.

R. integrál jsme tak definovali, dokonce dvěma způsoby, pro kompaktní podintervaly reálné osy různé od $\emptyset$ a singletonů $\{a\}$. Pro úplnost teď definici doplníme i o tyto případy, oddíl 2.2 pak rozšiřuje R. integrál na jakýkoli reálný interval. Pro algebraické manipulace s integrály je užitečné definovat symbol $\int_a^b f$ i pro $a>b$.

Definice 2.1.10 (dodatek k definici R. $\int$). *Nechť* $a,b\in\mathbb{R}$ *s* $a\le b$ *jsou čísla a* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *je funkce. Pro* $a=b$ *definujeme* $\int_a^b f = \int_a^a f := 0$*. Pro prázdný interval též* $\int_\emptyset f := 0$ *pro jakoukoli funkci* f*. Konečně klademe*

$$\int_b^a f := -\int_a^b f\;,$$

pokud poslední integrál existuje.

Poslední definice říká, že prohození integračních mezí zachycuje změna znaménka. Využívá se to při počítání integrálů substitucemi s klesajícími funkcemi, například když proměnnou x probíhající $[0,1]$ nahradíme substitucí $x = 1 - y$ proměnnou y probíhající týž interval, ale v opačném smyslu (viz tvrzení 2.1).

Jak už z úlohy 2.1.7 tušíme, neomezené funkce R. integrál nemají.

Tvrzení 2.1.11 (neomezené funkce nemají integrál). *Když funkce*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

není omezená, potom $\underline{\int_a^b} f$ *nebo* $\overline{\int_a^b} f$ *není konečný, a tak* $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Řekněme, že f není omezená shora. Pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset [a,b]$ pak $\lim f(a_n) = +\infty$. Podle jedné věty ze ZS můžeme předpokládat, že $\lim a_n = c \in [a,b]$. Pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ ale

$$S(f,\, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i = +\infty\ ,$$

protože každý sčítanec je konečný nebo $+\infty$, a alespoň jeden z nich, ten s $c \in I_i$ a $a_n \in I_i$ pro nekonečně mnoho n, je $|I_i| M_i = |I_i|(+\infty) = +\infty$. Tedy množina hodnot horních součtů je $\{+\infty\}$ a $\overline{\int_a^b} f = +\infty$. Podobně se dokáže, že pro f neomezenou zdola je $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. □

Příklad 2.1.12. *Uvedeme příklad funkce* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, pro kterou*

$$\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = +\infty$$

(tedy f nemá Riemannův integrál, i když se dolní a horní integrál rovnají).

Stačí vzít $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. Podle předešlého důkazu, protože f není shora omezená, $\overline{\int_0^1} f = +\infty$. Pro odhad dolního integrálu vezmeme dělení $D_n = (0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$s(f, D_n) = \left(\frac{1}{2n} - 0\right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) \cdot n^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \geq \frac{n}{2}\ .$$

To pro $n \to +\infty$ jde též do $+\infty$ a podle definice 2.1.8 se $\underline{\int_0^1} f = +\infty$. □

Definice 2.1.13 (zjemnění dělení). *Pro dvě dělení $D \subset E$ intervalu $[a,b]$, kdy každý bod v D je i bodem v E, řekneme, že E zjemňuje D nebo že E je zjemnění D.*

Lemma 2.1.14 (o zjemnění). *Když $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a D a D' jsou dvě dělení intervalu $[a,b]$, přičemž D' zjemňuje D, pak*

$$s(f,\, D') \geq s(f,\, D) \ \text{ a } \ S(f,\, D') \leq S(f,\, D)\ .$$

Důkaz. Uvážíme-li definici sum $s(f, D)$ a $S(f, D)$ a to, že D' vznikne z D postupným přidáváním bodů, vidíme, že obě nerovnosti stačí dokázat v situaci, kdy $D = (a_0 = a < a_1 = b)$ a $D' = (a_0' = a < a_1' < a_2' = b)$. Podle definice infim hodnot funkce f máme

$$m_0 = \inf_{a_0 \leq x \leq a_1} f(x) \leq \inf_{a_0' \leq x \leq a_1'} f(x) = m_0' \ \text{ a } \ m_0 \leq \inf_{a_1' \leq x \leq a_2'} f(x) = m_1'\ .$$

Tedy

$$\begin{aligned} s(f,\, D') &= (a_1' - a_0')m_0' + (a_2' - a_1')m_1' \geq (a_1' - a_0')m_0 + (a_2' - a_1')m_0 \\ &= (a_2' - a_0')m_0 = (b-a)m_0 = s(f,\, D)\ . \end{aligned}$$

Nerovnost $S(f, D') \leq S(f, D)$ se dokáže podobně. □

Důsledek 2.1.15 ($s \leq S$). *Když $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a D, D' jsou dvě dělení $[a,b]$, pak*

$$s(f,\, D) \leq S(f,\, D')\ .$$

Důkaz. Nechť $E = D \cup D'$ je společné zjemnění obou dělení. Podle předešlého lemmatu máme

$$s(f,\, D) \leq s(f,\, E) \leq S(f,\, E) \leq S(f,\, D')\ .$$

První a poslední nerovnost platí podle lemmatu a prostřední plyne hned z definice horní a dolní sumy. □

Tvrzení 2.1.16 ($\underline{\int} \leq \overline{\int}$). *Nechť*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

je funkce, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ a D, D' jsou dvě dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí nerovnosti

$$m(b-a) \leq s(f,\, D) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(f,\, D') \leq M(b-a)\ .$$

Důkaz. První a poslední nerovnost jsou speciální případy lemmatu 2.1.14. Druhá a předposlední nerovnost plynou hned z definice dolního a horního integrálu jakožto suprema, respektive infima. Podle důsledku 2.1.15 je každý prvek množiny dolních sum, se supremem $\underline{\int_a^b} f$, menší nebo roven každému prvku množiny horních sum, s infimem je $\overline{\int_a^b} f$. Podle definice infima (největší dolní mez) a suprema (nejmenší horní mez) odtud vyplývá prostřední nerovnost: pro každé dělení D je $s(f, D)$ dolní mezí druhé množiny, tedy $s(f, D) \le \overline{\int_a^b} f$, tedy $\overline{\int_a^b} f$ je horní mezí první množiny, tedy $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$. □

Tvrzení 2.1.17 (kritérium integrovatelnosti). *Nechť, pro reálná čísla $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(a,\, b) \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, D:\ 0 \le S(f,\, D) - s(f,\, D) < \varepsilon\,.$$

Jinými slovy, f má Riemannův integrál, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je pro nějaké dělení D intervalu $[a, b]$ odpovídající horní suma o méně než ε větší než odpovídající dolní suma.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že f má na $[a, b]$ Riemannův integrál, tedy $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f \in \mathbb{R}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního integrálu existují dělení E_1 a E_2, že

$$s(f,\, E_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ a }\ S(f,\, E_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Podle lemmatu 2.1.14 tyto nerovnosti platí i po náhradě E_1 a E_2 jejich společným zjemněním $D = E_1 \cup E_2$. Sečtením obou nerovností dostaneme

$$S(f,\, D) - s(f,\, D) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + \left(- \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon\,.$$

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme platnost uvedené podmínky s ε a D. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme odpovídající dělení D a podle definice dolního a horního integrálu dostaneme

$$\overline{\int_a^b} f \le S(f, D) < s(f, D) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f + \varepsilon,\ \text{ tedy }\ \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon\,.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tak podle předchozího tvrzení máme $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$ (úloha 2.1.18). Tedy f má na $[a, b]$ Riemannův integrál. □

Úloha 2.1.18. *Proč na konci předchozího důkazu nemůže nastat třeba $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = +\infty$, jako v příkladu 2.1.12?*

Příklad 2.1.19 (omezená funkce bez integrálu). *Funkci*

$$f\colon [0,\, 1] \to \{0,\, 1\},\ f(\alpha) = 1 \iff \alpha \in \mathbb{Q}\,,$$

se říká Dirichletova funkce. *Nemá Riemannův integrál, i když je omezená.*

Každý interval s kladnou délkou obsahuje body, kde má f hodnotu 0 a body, kde má hodnotu 1. Proto $s(f, D) = 0$ a $S(f, D) = 1$ pro každé dělení D a

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < \overline{\int_0^1} f = 1 \,.$$

□

Příklad 2.1.20. *Spočítáme z druhé definice Riemannova integrálu, že*

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \,.$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$ vezmeme dělení $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Pak

$$s(f, \, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = n^{-3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$

a podobně

$$S(f, \, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 = n^{-3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \,.$$

Tedy $S(f, D_n) - s(f, D_n) = \frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$ a $f(x) = x^2$ má na $[0, 1]$ Riemannův integrál podle tvrzení 2.1.17. Podle tvrzení 2.1.16 stačí ukázat, že pro $n \to \infty$ je

$$S_n := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + O(n^2) \,.$$

Protože $1 + 2 + \cdots + n \le n^2$, z

$$(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^3 - i^3) = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1) = 3S_n + 3\sum_{i=1}^{n} i + n$$

opravdu máme, že

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^3}{3} + O(n^2) \,.$$

□

Zde se ukázala přednost Darbouxova přístupu v definici 2.1.9 ve srovnání s Riemannovým v definici 2.1.6, podle níž by se předchozí integrál počítal dost obtížně.

Věta 2.1.21 (ekvivalence obou definic Riemannova integrálu). *Funkce*

$$f\colon [a,\,b] \to \mathbb{R},\ \ a,\,b \in \mathbb{R},\ \ a < b\ ,$$

má Riemannův integrál podle definice 2.1.6, právě když má má Riemannův integrál podle definice 2.1.9. Obě hodnoty se vždy rovnají.

Důkaz. Nechť $\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$ podle definice 2.1.6. To znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b)$ intervalu $[a, b]$, že

$$\left| I - \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| f(c_i) \right| < \varepsilon\ ,$$

pro jakékoli body $c_i \in I_i$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ (dokonce to platí pro každé dělení D s dostatečně malou normou). Speciálně jsou všechny hodnoty $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ konečné. Pro dané $\varepsilon > 0$ a takové D zvolíme body $c_i, c_i' \in I_i$ tak, že

$$M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(c_i') \ \text{ a } \ f(c_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a},\ i = 0, 1, \ldots, k-1\ .$$

Pak

$$\begin{aligned} s(f,\,D) &= \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i > \sum_{i=0}^{k-1} |I_i|(f(c_i) - \varepsilon/(b-a)) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| f(c_i) - \varepsilon \\ &= R(f,\,D,\,C) - \varepsilon > I - 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Podobně pomocí C' a $R(f, D, C')$ plyne, že $S(f, D) < I + 2\varepsilon$. Tedy, podle tvrzení 2.1.16, $I - 2\varepsilon < \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f < I + 2\varepsilon$. Platí to pro každé $\varepsilon > 0$, tudíž $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$ a $\int_a^b f = I$ podle definice 2.1.9.

Nechť nyní $\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$ podle definice 2.1.9. Podle tvrzení 2.1.11 je f omezená, $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in [a, b]$ a nějakou konstantu $K > 0$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle tvrzení 2.1.16 a 2.1.17 existuje dělení $D = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b)$ intervalu $[a, b]$, že

$$I - \varepsilon < s(f,\,D) \le S(f,\,D) < I + \varepsilon\ .$$

Vezmeme tak malé $\delta > 0$, že $3\delta k K < \varepsilon$. Odhadneme $R(f, D', C)$ pro jakékoli dělení $D' = (a = a_0' < a_1' < \cdots < a_l' = b)$ intervalu $[a, b]$ s body $C = (c_0, \ldots, c_{l-1})$ a s $\lambda(D') < \delta$. Pro každé $i = 0, 1, \ldots, k-1$ vezmeme množinu

$$X_i = \{j \in \{0, 1, \ldots, l-1\} \mid I_j' \subset I_i\}$$

a jako $Y \subset \{0, 1, \ldots, l-1\}$ označíme množinu zbylých indexů j, těch intervalů I_j' v dělení D', že $I_j' \not\subset I_i$ pro žádné i. Patrně (i) pro každé i je $|I_i| \ge \sum_{j \in X_i} |I_j'| > |I_i| - 2\delta$ a (ii) $|Y| < k$ (úloha 2.1.22). Tedy

$$\begin{aligned} R(f,\,D',\,C) &\ge s(f,\,D') = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j \in X_i} |I_j'| m_j' + \sum_{j \in Y} |I_j'| m_j' \ge \sum_{i=0}^{k-1} m_i \sum_{j \in X_i} |I_j'| - \\ &\quad - k\delta K \ge s(f,\,D) - 2k\delta K - k\delta K > I - 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Podobně (úloha 2.1.23)

$$\begin{aligned}R(f,\,D',\,C) \quad &\leq \quad S(f,\,D') = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j\in X_i}|I_j'|M_j' + \sum_{j\in Y}|I_j'|M_j' \leq \sum_{i=0}^{k-1}M_i\sum_{j\in X_i}|I_j'| + \\ &\quad + k\delta K \leq S(f,\,D) + 2k\delta K + k\delta K < I + 2\varepsilon\ .\end{aligned}$$

Platí to pro každé $\varepsilon > 0$, tudíž $\lim_{\lambda(D)\to 0} R(f,D,C) = I$ a $\int_a^b f = I$ podle definice 2.1.6. □

Úloha 2.1.22. *Dokažte nerovnosti (i) a (ii).*

Úloha 2.1.23. *Proč platí nerovnosti* $\sum_{i=0}^{k-1} m_i \sum_{j\in X_i} |I_j'| \geq s(f,D) - 2k\delta K$ *a* $\sum_{i=0}^{k-1} M_i \sum_{j\in X_i} |I_j'| \leq S(f,D) + 2k\delta K$*?*

Z tvrzení 2.1.11 a příkladu 2.1.19 je vidět, že neomezenost funkce i její přílišná nespojitost vylučují existenci integrálu. Francouzský matematik *Henri Lebesgue (1877–1941)* (narodil se v Beauvais, v r. 1901 zavedl nový a hlavně obecnější typ integrálu, posléze po něm nazvaný, který znamenal převrat v matematice, od r. 1921 až do smrti byl profesorem matematiky na Collège de France), s nímž jsme se setkali v *MA I* [5] v jeho větě o sečnách a tečnách, nalezl nutnou a postačující podmínku pro existenci Riemannova integrálu omezené funkce v závislosti na velikosti množiny bodů, kde je funkce nespojitá: integrál existuje, právě když má tato množina míru nula. Množiny s nulovou mírou jsme definovali už v *MA I* [5] právě kvůli větě o sečnách a tečnách. Teď definici pro čtenářovo pohodlí připomeneme.

Definice 2.1.24 (nulová míra). *Množina $M \subset \mathbb{R}$ má (Lebesgueovu) míru nula (nebo také má nulovou míru), když pro každé $\varepsilon > 0$ existují posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, že $a_n < b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum (b_n - a_n) \leq \varepsilon \ \text{ a } \ M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\,b_n)\ .$$

Znamená to, že M lze pokrýt systémy otevřených intervalů s libovolně malými celkovými délkami.

Úloha 2.1.25. *Ukažte, že když se v předchozí definici povolí libovolné (nebo i jen některé jiné) typy intervalů (ovšem s kladnými délkami), popřípadě i jejich konečné posloupnosti, dává to stále ekvivalentní definici množin s nulovou mírou.*

Tvrzení 2.1.26 (vlastnosti množin míry 0**).** *Množiny reálných čísel s nulovou mírou mají následující vlastnosti.*

1. *Každá nejvýše spočetná množina má míru nula.*

2. Podmnožina množiny s nulovou mírou má také míru nula.

3. Nejvýše spočetné sjednocení množin míry nula má nulovou míru.

Důkaz. 1. Danou nejvýše spočetnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ seřadíme do posloupnosti (a_n) tak, že $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Posloupnost intervalů

$$(a_n - \varepsilon/2^{n+1},\, a_n + \varepsilon/2^{n+1}),\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

má obě vlastnosti požadované definicí 2.1.24.

2. Toto plyne triviálně z definice 2.1.24.

3. Danou nejvýše spočetnou množinu $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ seřadíme do posloupnosti (A_n) tak, že $X = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Každá $A_n \subset \mathbb{R}$ má míru nula, tedy pro dané $\varepsilon > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost intervalů $(a_{m,n}, b_{m,n})$, $m \in \mathbb{N}$, že

$$\sum_{m=1}^{\infty}(b_{m,n} - a_{m,n}) \le \frac{\varepsilon}{2^n} \ \text{ a }\ A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty}(a_{m,n},\, b_{m,n})\ .$$

Nechť (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}$, je seřazení do posloupnosti množiny intervalů

$$\{(a_{m,n},\, b_{m,n}) \mid m,\, n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Není těžké vidět, že intervaly (a_n, b_n) mají celkovou délku nejvýše ε a pokrývají sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (úloha 2.1.27). □

Úloha 2.1.27. *Dokažte tvrzení závěru důkazu, že* $\sum(b_n - a_n) \le \varepsilon$ *a* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$.

Například spočetná množina

$$[0,\, 1] \cap \mathbb{Q} = (c_1,\, c_2,\, \dots)$$

má nulovou míru a lze ji pokrýt posloupností dokonce *vzájemně disjunktních* otevřených intervalů $(a_n, b_n) \subset [0, 1]$ s libovolně malou celkovou délkou $\le \varepsilon \in (0, 1)$: nějakým intervalem $I_1 = (a_1, b_1) \subset [0, 1]$ délky $\frac{\varepsilon}{2}$ pokryjeme číslo c_1, pak vezmeme nejmenší $n_2 \in \mathbb{N}$, že $c_{n_2} \notin I_1$ a nějakým intervalem $I_2 = (a_2, b_2) \subset [0, 1]$ délky $\le \frac{\varepsilon}{4}$ a disjunktním s I_1 pokryjeme číslo c_{n_2}, pak vezmeme nejmenší $n_3 \in \mathbb{N}$, že $c_{n_3} \notin I_1 \cup I_2$ a nějakým intervalem $I_3 = (a_3, b_3) \subset [0, 1]$ délky $\le \frac{\varepsilon}{8}$ a disjunktním s $I_1 \cup I_2$ pokryjeme číslo c_{n_3} a tak postupujeme dál. Je jasné, že po nekonečně mnoha krocích tím vytvoříme posloupnost otevřených intervalů $(a_n, b_n) \subset [0, 1]$ s uvedenými vlastnostmi, nicméně se její existence v jednom ohledu vzpírá (alespoň autorově) představivosti.

Úloha 2.1.28. *Proč předchozí postup pokračuje nekonečně dlouho a pro každé* $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$, *existuje (nejmenší)* $n_j \in \mathbb{N}$, *že* $c_{n_j} \notin I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{j-1}$?

Představivosti se vzpírá množina

$$M = [0,\, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,\, b_n)$$

mezer mezi intervaly. V každém konečném kroku $n \in \mathbb{N}$ je odpovídající

$$M_n = [0,\, 1] \setminus ((a_1,\, b_1) \cup \cdots \cup (a_n,\, b_n)) = [c_0,\, d_0] \cup \cdots \cup [c_n,\, d_n]$$

tvořena $n + 1$ uzavřenými intervaly $[c_i,\, d_i]$ s kladnými délkami. Po „přechodu do nekonečna“, kdy n proběhne celé $\mathbb{N}$, dostaneme nekonečnou ale stále jen spočetnou posloupnost intervalů

$$(a_n,\, b_n),\ n = 1,\, 2,\, \ldots\ ,$$

která je jednoduše sjednocením všech svých počátečních úseků

$$(a_1,\, b_1),\ (a_2,\, b_2),\ \ldots,\ (a_n,\, b_n)\ ,$$

ale co se stane s množinami mezer M_n? „Přejdou“ v množinu M, která je nepředstavitelně složitější než všechny M_n dohromady. Množina M neobsahuje žádný interval s kladnou délkou (ten totiž obsahuje racionální čísla z $[0, 1]$, kterým se M vyhýbá) a současně je nespočetná. Kdyby M byla spočetná

Dokažme tedy, že intervaly s kladnými délkami nemají míru nula.

Tvrzení 2.1.29 (zřejmé, ale ...). *Množina*

$$[a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}\ ,$$

kde $a < b$ jsou reálná čísla, nemá míru nula.

Důkaz. Předpokládáme, že pro nějaká reálná čísla $a_1 < a'_1$, $a_2 < a'_2$, a tak dál nastává

$$[a,\, b] \subset (a_1,\, a'_1) \cup (a_2,\, a'_2) \cup \ldots \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (a'_i - a_i) < b - a$$

a odvodíme spor. Podle Heineho–Borelovy věty (každé pokrytí kompaktní množiny otevřenými intervaly má konečné podpokrytí, viz [5]) můžeme předpokládat, že posloupnost intervalů (a_i, a'_i) je konečná, řekněme $(a_1, a'_1), (a_2, a'_2), \ldots, (a_n, a'_n)$, a že $(a_i, a'_i) \cap [a, b] \ne \emptyset$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Vezmeme množiny

$$X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_r\} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i,\, a'_i\} \cup \{a,\, b\} \right) \cap [a,\, b]$$

a

$$X_i = \{j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\} \mid x_j \in [a_i,\, a'_i]\},\ i = 1,\, 2,\, \ldots, n\ ,$$

což jsou neprázdné intervaly čísel z $[r]$. Označíme-li $u_i = \min(X_i)$ a $v_i = \max(X_i)$, máme

$$x_{v_i} - x_{u_i} = \sum_{j=u_i}^{v_i-1}(x_{j+1} - x_j) \le a_i' - a_i \ \ \text{(úloha 2.1.30)}\ .$$

Dále

$$[r] = \{1, 2, \ldots, r\} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$$

a dokonce pro každé $j \in [r-1]$ existuje $i \in [n]$, že $\{j, j+1\} \subset X_i$, tedy $u_i \le j < v_i$ (úloha 2.1.31). Proto ($x_r = b$ a $x_1 = a$)

$$b - a = \sum_{j=1}^{r-1}(x_{j+1} - x_j) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=u_i}^{v_i-1}(x_{j+1} - x_j) \le \sum_{i=1}^{n}(a_i' - a_i) < b - a\ ,$$

což je ten spor. □

Úloha 2.1.30. *Proč platí nerovnost $x_{v_i} - x_{u_i} \le a_i' - a_i$?*

Úloha 2.1.31. *Proč pro každé $j \in [r-1]$ existuje $i \in [n]$, že $\{j, j+1\} \subset X_i$?*

Věta 2.1.32 (H. Lebesgue, 1901). *Funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál, právě když je omezená a množina bodů intervalu $[a, b]$, kde je nespojitá, má míru nula.*

Důkaz.

□

Otázka posluchače. *Existuje nespočetná množina reálných čísel s nulovou mírou?*

Existuje. Klasickým příkladem je tzv. *Cantorovo diskontinuum.* Je to množina

$$X_C := \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \tfrac{1}{3^n}] \cup [\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{3}{3^n}] \cup [\tfrac{4}{3^n}, \tfrac{5}{3^n}] \cup [\tfrac{6}{3^n}, \tfrac{7}{3^n}] \cup \cdots \cup [\tfrac{3^n-1}{3^n}, 1]$$

— to, co zbude z intervalu $[0, 1]$ vyhodíme-li prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pak prostřední třetinu z každé z obou zbylých krajních třetin, tj. pak vyhodíme $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, pak vyhodíme z každé ze zbylých čtyřech devítin její prostřední třetinu a tak dále do nekonečna. Jinými slovy

$$X_C = \{\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i \mid a_i \in \{0, 2\}\}$$

— X_C jsou právě ta čísla z $[0, 1]$, v jejichž rozvoji při základu 3 se vyskytují pouze cifry 0 a 2 (a nikde cifra 1). Například

$$1/3 = (0.02222\ldots)_3 \in X_C \ \text{ nebo } \ 1/4 = (0.020202\ldots)_3 \in X_C\ ,$$

ale $5/8 = (0.121212\ldots)_3 \notin X_C$. Z této korespondence s nekonečnými posloupnostmi 0 a 2 je vidět, že X_C je nespočetná. Není ani těžké ukázat, že má nulovou míru (cvičení).

Tvrzení (monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost). *Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f neklesá (pro nerostoucí f se argumentuje podobně). Pro každý podinterval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ pak máme $\inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha)$ a $\sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme libovolné dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \varepsilon$ a máme

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \varepsilon(f(a_k) - f(a_0)) = \varepsilon(f(b) - f(a)) \; . \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}(a,b)$. (Kontrolní otázka: proč v předešlém výpočtu nelze místo $\leq$ psát $<$?) $\square$

I spojitost postačuje pro integrovatelnost. Musíme se však seznámit s její silnější podobou. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je interval, je *stejnoměrně spojitá* (na I), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x, x' \in I, \; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \; .$$

Požaduje se tedy silněji, aby jediná mez δ fungovala pro všechny dvojice bodů x, x' z I. V obyčejné spojitosti může δ záviset na poloze x a x'. Stejnoměrná spojitost implikuje triviálně spojitost, ale naopak to obecně neplatí. Například funkce

$$f(x) = 1/x : \; I = (0,1) \to \mathbb{R}$$

je na I spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá: $f(1/(n+1)) - f(1/n) = 1$, i když $1/(n+1) - 1/n \to 0$ pro $n \to \infty$. Na *kompaktním intervalu I*, což je interval typu $[a,b]$ s $-\infty < a \leq b < +\infty$, však naštěstí oba typy spojitosti splývají.

Tvrzení (na kompaktu: spojitost $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost). *Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ spojitá, je na něm stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě intervalu $[a,b]$ (tedy jednostraně v krajních bodech a a b), ale že není na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá. Odvodíme spor. Negace stejnoměrné spojitosti znamená, že

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, x' \in I:\ |x - x'| < \delta\ \&\ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon\ .$$

Což znamená, že pro $\delta = 1/n$ a $n = 1, 2, \ldots$ existují body $x_n, x'_n \in [a,b]$, že $|x_n - x'_n| < 1/n$, ale $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě ze ZS můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnosti (x_n) a (x'_n) obě konvergují a (nevyhnutelně) k témuž bodu α z $[a,b]$. (Podle této věty existuje posloupnost přir. čísel $k_1 < k_2 < \ldots$, že (x_{k_n}) konverguje. Opět podle této věty existuje posloupnost přir. čísel $l_1 < l_2 < \ldots$, že $(x'_{k_{l_n}})$ konverguje. Posloupnost $(x_{k_{l_n}})$ zůstává konvergentní, protože je podposloupností posloupnosti (x_{k_n}). Protože $|x_{k_{l_n}} - x'_{k_{l_n}}| < 1/k_{l_n} \leq 1/n \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_{l_n}} = \lim_{n\to\infty} x'_{k_{l_n}} = \alpha\ .$$

Abychom se vyhnuli vícenásobným indexům, přeznačíme $x_{k_{l_n}}$ jako x_n a $x'_{k_{l_n}}$ jako x'_n.) Podle Heineho definice limity, spojitosti f v bodě α a aritmetiky limit máme

$$0 = f(\alpha) - f(\alpha) = \lim f(x_n) - \lim f(x'_n) = \lim(f(x_n) - f(x'_n))\ .$$

Jsme ve sporu s tím, že $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pro každé n. □

Tvrzení 2.1.33 (spojitost ⇒ integrovatelnost). *Je-li funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, potom má na intervalu $[a,b]$ Riemannův indexRiemann, Bernhard integrál.*

Důkaz. Nechť f je na $[a,b]$ spojitá. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předchozího tvrzení vezmeme $\delta > 0$, že $|f(x) - f(x)'| < \varepsilon$ platí, jakmile $x, x' \in [a,b]$ jsou blíže než δ. Tedy

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f - \inf_{[\alpha,\beta]} f \leq \varepsilon$$

platí pro každý podinterval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ délky menší než δ (proč?). Vezmeme jakékoli dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$ a máme

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)\varepsilon \\ &= \varepsilon(a_k - a_0) = \varepsilon(b - a)\ . \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}(a,b)$. □

Tvrzení 2.1.34 (malá nespojitost nevadí). *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená a spojitá, s možnou výjimkou konečně mnoha bodů. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.*

Důkaz.

□

Že monotonie i spojitost postačují k integrovatelnosti jsme dokázali přímo, i když obojí vyplývá hned jako důsledek z Lebesgueovy věty, což si rozmyslete jako cvičení. Zmíníme její další důsledky.

Tvrzení (spojitost(integrovatelnost)=integrovatelnost). *Má-li funkce $f:$ $[a,b] \to [c,d]$ Riemannův integrál a $g:\ [c,d] \to \mathbb{R}$ je na $[c,d]$ spojitá, potom má složená funkce $g(f):\ [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Protože vnější funkce g je omezená, jako spojitá funkce na kompaktním intervalu, je i složená funkce $g(f)$ omezená. Je-li f spojitá v bodě α z $[a,b]$, je i složená funkce $g(f)$ spojitá v α, protože g je spojitá v $f(\alpha)$ a spojitost se skládáním zachovává, jak jsme si dokázali v ZS. Množina M bodů nespojitosti funkce $g(f)$ je tedy obsažena v množině N bodů nespojitosti funkce f. Podle předpokladu a L. věty má N nulovou míru. Takže i M má nulovou míru a podle L. věty má $g(f)$ Riemannův integrál. □

Proto z $f \in \mathcal{R}(a,b)$ plyne například $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$ nebo $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$. Jako cvičení si rozmyslete, proč a jak z $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$ plyne, že i

$$fg \in \mathcal{R}(a,b) \ \text{ a } \ \max(f,g) \in \mathcal{R}(a,b)\ .$$

Nyní se podíváme na linearitu R. integrálu. Nejprve ukážeme linearitu $\int_a^b f$ jako funkce integrandu f, a pak jako funkce integračních mezí a a b.

Tvrzení (linearita $\int$ v integrandu). *Nechť $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$ jsou dvě funkce mající R. integrál a $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Potom i*

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a,b) \ \ a \ \ \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\ .$$

Důkaz. Stačí prověřit tři speciální případy lineárních kombinací, totiž $-f$, αf s $\alpha \ge 0$ a $f+g$, ostatní se z těchto již odvodí. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle kritéria integrovatelnosti existuje dělení D intervalu $[a,b]$, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon\ \&\ S(g,D) - s(g,D) < \varepsilon\ .$$

(Jistě máme dvě taková dělení, D_1 pro f a D_2 pro g. Přechodem ke společnému zjemnění dosáhneme, že $D_1 = D_2$.) Podle definice infima a suprema množiny reálných čísel, pro libovolný podinterval $I \subset [a,b]$ platí, že (pro $\alpha \geq 0$)

$$\inf_I (-f) = -\sup_I f,\ \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f,\ \inf_I (f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

a analogicky pro suprema (prohodíme inf a sup a poslední nerovnost otočíme). Podle definice dolní, popř. horní, sumy jako lineární kombinace (s > 0 koeficienty) infim, popř. suprem,

$$S(-f,D) - s(-f,D) = -s(f,D) - (-S(f,D)) = S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon\ ,$$

$$S(\alpha f,D) - s(\alpha f,D) = \alpha S(f,D) - \alpha s(f,D) \leq \alpha\varepsilon\ (\alpha \geq 0)$$

a

$$\begin{aligned} S(f+g,D) - s(f+g,D) &\leq (S(f,D)+S(g,D)) - (s(f,D)+s(g,D)) \\ &= S(f,D) - s(f,D) + S(g,D) - s(g,D) \\ &< 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Takže, podle kritéria integrovatelnosti, i $-f, \alpha f, f+g \in \mathcal{R}(a,b)$. Navíc, podle nerovností mezi dolními a horními sumami a integrálem, $\int_a^b f \in [s(f,D), S(f,D)]$ a totéž platí pro funkci g. Tedy $\int_a^b (-f)$ leží v intervalu

$$[s(-f,D), S(-f,D)] = [-S(f,D), -s(f,D)] \ni -\int_a^b f$$

a čísla $\int_a^b (-f)$ a $-\int_a^b f$ se tak liší o méně než ε. Tedy $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. Podobně $\int_a^b \alpha f$ leží v intervalu

$$[s(\alpha f,D), S(\alpha f,D)] = [\alpha s(f,D), \alpha S(f,D)] \ni \alpha \int_a^b f$$

o délce nejvýše $\alpha\varepsilon$, a tak $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. Konečně $\int_a^b (f+g)$ leží v intervalu

$$[s(f+g,D), S(f+g,D)] \subset [s(f,D)+s(g,D), S(f,D)+S(g,D)] \ni \int_a^b f + \int_a^b g$$

o délce méně než 2ε, a tak $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

Podle předchozího tvrzení množina riemannovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{R}(a,b)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $f \mapsto \int_a^b f$ je lineární zobrazení z $\mathcal{R}(a,b)$ do $\mathbb{R}$. Říkáme, že R. integrál je *lineární funkcionál.* Předchozí důkaz linearity pomocí dolních a horních sum jsem na přednášce z časových důvodů neuváděl a odvolal jsem se na ekvivalenci obou definic R. integrálu, kterou nebudeme dokazovat.

Věta (ekvivalence obou definic R. $\int$). *Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní: pro každou funkci $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$*

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} R(f,D,C) \text{ existuje} \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$$

a obě hodnoty, pokud existují, se rovnají.

Jako cvičení si rozmyslete důkaz tvrzení o linearitě $\int$ v integrandu pomocí první definice R. integrálu.

Přejdeme k linearitě $\int$ jako funkce integračních mezí. Nejprve mírně rozšíříme definici $\int_a^b f$:

$$\int_a^a f := 0 \ \text{ a } \ \int_a^b f := -\int_b^a f \ \text{ pro } \ a > b\ .$$

Pro $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ a podinterval $I\subset[a,b]$ označíme zúžení funkce f na I v následujícím tvrzení pro jednoduchost opět jako f.

Tvrzení 2.1.35 (linearita $\int$ v integračních mezích). *Nechť $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ je funkce a $c\in(a,b)$. Potom*

$$f\in\mathcal{R}(a,b) \iff f\in\mathcal{R}(a,c)\ \&\ f\in\mathcal{R}(c,b)$$

a, jsou-li tyto integrály definované,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\ .$$

Důkaz. Jako $f_1:\ [a,c]\to\mathbb{R}$ a $f_2:\ [c,b]\to\mathbb{R}$ označíme zúžení funce f na uvedený podinterval. Nechť $f\in\mathcal{R}(a,b)$. Pro dané $\varepsilon>0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D intervalu $[a,b]$, že $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$. Můžeme předpokládat (přechodem ke zjemnění), že $c\in D$. Bod c dělí D na dělení D' intervalu $[a,c]$ a dělení D'' intervalu $[c,b]$. Protože $S(f,D)=S(f_1,D')+S(f_2,D'')$ a $s(f,D)=s(f_1,D')+s(f_2,D'')$, z

$$\varepsilon > S(f,D)-s(f,D) = (S(f_1,D')-s(f_1,D')) + (S(f_2,D'')-s(f_2,D''))$$

plyne, díky nezápornosti rozdílu horní a dolní sumy, že i $\varepsilon > S(f_1,D')-s(f_1,D')$ a $\varepsilon > S(f_2,D'')-s(f_2,D'')$. (Obecně samozřejmě z $\gamma>\alpha+\beta$ neplyne, že $\gamma>\alpha$ a $\gamma>\beta$.) Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, $f_1\in\mathcal{R}(a,c)$ a $f_2\in\mathcal{R}(c,b)$. Máme $\int_a^c f_1 \in [s(f_1,D'),S(f_1,D')]$, $\int_c^b f_2 \in [s(f_2,D''),S(f_2,D'')]$ a $\int_a^b f\in[s(f,D),S(f,D)]$, z čehož plyne, že $\int_a^c f_1+\int_c^b f_2$ a $\int_a^b f$ se liší o méně než ε. Tedy $\int_a^c f_1+\int_c^b f_2=\int_a^b f$.

Nechť $f_1 \in \mathcal{R}(a,c)$ a $f_2 \in \mathcal{R}(c,b)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D' intervalu $[a,c]$ a dělení D'' intervalu $[c,b]$, že $S(f_1,D') - s(f_1,D') < \varepsilon$ a $S(f_2,D'') - s(f_2,D'') < \varepsilon$. Sečtením dostaneme

$$2\varepsilon > S(f_1,D') - s(f_1,D') + S(f_2,D'') - s(f_2,D'') = S(f,D) - s(f,D) ,$$

kde D je dělení intervalu $[a,b]$ vzniklé spojením D' a D''. Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, i $f \in \mathcal{R}(a,b)$. $\Box$

Důsledek ($\int$ přes cyklus je 0). *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $d = \min(a,b,c)$, $e = \max(a,b,c)$ a $f \in \mathcal{R}(d,e)$. Potom následující tři integrály existují a*

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 .$$

Důkaz. Nechť například $d = a < e = c$. Podle předchozího tvrzení máme

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f .$$

Celý součet pak je $\int_a^c f + \int_c^a f = \int_a^c f - \int_a^c f = 0$. Ostatní možnosti jsou podobné. $\Box$

Věta (1. základní věta analýzy). *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$F(x) = \int_a^x f .$$

Potom (i) F je na $[a,b]$ spojitá a (ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a,b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).

Důkaz. Nechť $c > 0$ je horní mez pro hodnoty $|f(x)|$, $a \le x \le b$ (f je integrovatelná a tedy omezená). Pro každé dva body $x, x_0 \in [a,b]$ máme

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \le |x - x_0| c ,$$

podle definice F, linearity $\int$ v integračních mezích a odhadu $\int$ horní sumou pro dělení (x_0, x) či (x, x_0) interválku s krajními body x a x_0. Pro $x \to x_0$ máme $F(x) \to F(x_0)$ a F je v x_0 spojitá.

Nechť $x_0 \in [a,b]$ je bod spojitosti f. Pro dané $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, jakmile $|x - x_0| < \delta$. Pro $0 < x - x_0 < \delta$ tedy

$$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon ,$$

podle triviálního odhadu $\int_{x_0}^{x} f$ dolní a horní sumou pro dělení (x_0, x). Pro $-\delta < x - x_0 < 0$ platí tytéž nerovnosti (v čitateli i jmenovateli zlomku se změní znaménko). Pro $x \to x_0$, $x \neq x_0$, tak máme $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$, čili $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Vyřídíme rest z 1. přednášky.

Důsledek (spojitá funkce má primitivní funkci). *Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ spojitá, potom má na $[a,b]$ primitivní funkci F.*

Důkaz. Stačí použít předchozí větu a položit $F(x) = \int_a^x f$. $\square$

Věta 2.1.36 (druhá Základní věta analýzy). *Pokud $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, f je v $\mathcal{R}(a,b)$ a $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ primitivní k f, pak*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \ .$$

Důkaz. Nechť $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Použijeme-li na každý interval $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a funkci F Lagrangeovu větu o střední hodnotě, dostaneme vztah

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{k-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} f(b_i)(a_{i+1} - a_i) \ ,$$

pro nějaké mezibody $a_i < b_i < a_{i+1}$ (neboť $F'(b_i) = f(b_i)$). Tedy (neboť $\inf_{I_i} f \leq f(b_i) \leq \sup_{I_i} f$)

$$s(f, D) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, D) \ .$$

Odtud a z integrovatelnosti f ihned plyne, že $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. $\square$

Pro funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se rozdíl jejích hodnot v krajních bodech často značí jako

$$F|_a^b := F(b) - F(a) \ .$$

Předchozí výsledky shrneme.

Důsledek ($\int$ pomocí primitivní funkce). *Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ spojitá, potom $f \in \mathcal{R}(a,b)$, f má na $[a,b]$ primitivní funkci F a pro tuto i všechny ostatní primitivní funkce je*

$$\int_a^b f = F|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Newtonův integrál. Staletí předtím, než přišel Riemann (po jistých pokusech Cauchyho) s přesnou definicí integrálu, počítali matematici integrály bez zábran přímo z primitivních funkcí tzv. *Newtonovým integrálem*. Připomeneme ho a porovnáme s integrálem Riemannovým.[1]

Nechť $f:\ (a,b)\to\mathbb{R}$, f má na (a,b) primitivní funkci F a ta má v krajních bodech vlastní jednostranné limity $F(a^+)=\lim_{x\to a^+}F(x)$ a $F(b^-)=\lim_{x\to b^-}F(x)$. Newtonův integrál funkce f na (a,b) pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f = F(b^-)-F(a^+)\ .$$

Protože různé primitivní funkce k f se liší jen posunem o konstantu, nezávisí tento rozdíl na volbě F a definice je korektní. Množinu funkcí newtonovsky integrovatelných na (a,b) označíme jako $\mathcal{N}(a,b)$. Jako $C(a,b)$ označíme množinu funkcí spojitých na $[a,b]$.

Tvrzení (porovnání Newtonova a Riemannova $\int$). *Máme*

$$C(a,b)\subset\mathcal{N}(a,b)\cap\mathcal{R}(a,b)\ .$$

Pokud $f\in\mathcal{N}(a,b)\cap\mathcal{R}(a,b)$*, pak*

$$(N)\int_a^b f=(R)\int_a^b f\ .$$

Množina $\mathcal{N}(a,b)\backslash\mathcal{R}(a,b)$ *i* $\mathcal{R}(a,b)\backslash\mathcal{N}(a,b)$ *je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.*

Důkaz. Je-li f na $[a,b]$ spojitá, je (jak jsme pomocí stejnoměrné spojitosti dokázali) $f\in\mathcal{R}(a,b)$ a (podle 1. ZVA) $F(x)=\int_a^x f$ je na $[a,b]$ primitivní k f. Máme $F(a^+)=F(a)=0$ a $F(b^-)=F(b)=\int_a^b f$, takže i $f\in\mathcal{N}(a,b)$.

Nechť $f\in\mathcal{N}(a,b)\cap\mathcal{R}(a,b)$. Protože $f\in\mathcal{N}(a,b)$, má na (a,b) primitivní funkci F a existují jednostranné vlastní limity $F(a^+)$ a $F(b^-)$. Protože $f\in\mathcal{R}(a,b)$, je pro každé $\delta>0$ i $f\in\mathcal{R}(a+\delta,b-\delta)$ a podle 2. ZVA máme

$$(R)\int_{a+\delta}^{b-\delta} f=F(b-\delta)-F(a+\delta)\ .$$

Pro $\delta\to 0^+$ jde levá strana k $(R)\int_a^b f$ (f je na $[a,b]$ omezená, takže integrály f přes $[a,a+\delta]$ a $[b-\delta,b]$ jdou k 0) a pravá strana jde k $F(b^-)-F(a^+)=(N)\int_a^b f$.

Funkce $f(x)=x^{-1/2}:\ (0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=2013$, má na $(0,1)$ Newtonův integrál: $F(x)=2x^{1/2}$ je tam k ní primitivní, $F(0^+)=0$ a $F(1^-)=2$, takže $(N)\int_0^1 f=2$. Tato funkce ale není na $[0,1]$ omezená, a proto $f\notin\mathcal{R}(0,1)$. Funkce

[1]Zájemcům o historii a další druhy integrálů doporučujeme knihu Š. Schwabik a P. Šarmanová, *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, 1996.

znaménka $\operatorname{sgn}(x)$ je na $[-1,1]$ neklesající a tedy má na $[-1,1]$ Riemanův integrál. Na $(-1,1)$ ale nemá Newtonův integrál — jak jsme ukázali v 1. přednášce, nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci. $\square$

K závěrečným příkladům poznamenejme, že nicméně

$$\lim_{\delta\to 0^+}(R)\int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ ,$$

čili útvar vymezený grafem $y = 1/\sqrt{x}$ a intervalem $(0,1]$ má plochu 2, a že i když nemůžeme spočítat

$$(R)\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\ dx$$

okamžitě přímo pomocí 2. ZVA (protože primitivní funkce na daném intervalu neexistuje), po rozkladu $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$ už můžeme počítat pomocí primitivních funkcí:

$$\begin{aligned}
(R)\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\ dx &= (R)\int_{-1}^0 \operatorname{sgn}(x)\ dx + (R)\int_0^1 \operatorname{sgn}(x)\ dx \\
&= (R)\int_{-1}^0 (-1)\ dx + (R)\int_0^1 1\ dx \\
&= (-x)|_{-1}^0 + x|_0^1 = (-1) + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ve výpočtu jsme změnili hodnotu funkce $\operatorname{sgn}(x)$ v $x = 0$, ale to nemá na integrovatelnost a hodnotu integrálu žádný vliv).

V dalším už budeme integrálem opět rozumět výhradně Riemannův integrál a místo $(R)\int$ psát pouze $\int$. Dvě metody výpočtu primitivní funkce, per partes a substituční, se díky 2. ZVA odrážejí i ve výpočtech R. integrálů.

Tvrzení (integrace per partes). *Nechť $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mají na $[a,b]$ spojité derivace f' a g'. Potom*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g\ .$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení (integrace substitucí). *Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, přičemž φ má na $[\alpha,\beta]$ spojitou φ' a $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ nebo $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.*

1. Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \begin{cases} \int_a^b f \quad \text{nebo} \\ \int_b^a f = -\int_a^b f\ . \end{cases}$$

2. Je-li φ na $[\alpha,\beta]$ rostoucí nebo klesající a $f \in \mathcal{R}(a,b)$, platí opět předchozí rovnost integrálů.

Důkaz. 1. Funkce f je na $[a,b]$ spojitá a má tam tedy primitivní funkci F. Derivace složené funkce dává na $[\alpha,\beta]$ rovnost $F(\varphi)' = f(\varphi)\varphi'$. Takže $F(\varphi)$ je na $[\alpha,\beta]$ primitivní k $f(\varphi)\varphi'$. Funkce $f(\varphi)\varphi'$ je na $[\alpha,\beta]$ spojitá (je součinem spojitých funkcí), takže $f(\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(\alpha,\beta)$. Dvojím užitím 2. ZVA (v první a třetí rovnosti) máme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = F(\varphi)|_\alpha^\beta = F|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\ .$$

2. Ponecháme z časových důvodů bez důkazu. □

Aplikace integrálů. Odhadneme tzv. *harmonická čísla H_n*,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ .$$

Pro funkci $f(x) = 1/x : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ a dělení $D = (1,2,\ldots,n+1)$ intervalu $[1,n+1]$ zřejmě máme

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i+1} = H_{n+1} - 1 \ \text{ a } \ S(f,D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i} = H_n\ .$$

Protože $s(f,D) < \int_1^{n+1} 1/x = \log(n+1) < S(f,D)$, pro $n \ge 2$ dostáváme odhad

$$\log(n+1) < H_n < 1 + \log n\ .$$

Cvičení: dokažte, že pro $n \ge 2$ nikdy H_n není celé číslo.

Tvrzení 2.1.37 (součet jako integrál). *Nechť $a,b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, jsou celá čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Pak existuje číslo $\theta \in [0,1]$, že platí rovnost ($n \in \mathbb{Z}$)*

$$S := \sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f + \theta(f(b) - f(a))\ .$$

Důkaz. *První důkaz.* Předpokládáme, že funkce f neklesá, pro nerostoucí f je důkaz podobný (úloha 2.1.38). Pro dělení $D = (a, a+1, \ldots, b)$ intervalu $[a, b]$ na jednotkové intervalky máme nerovnosti

$$s(f, D) = \sum_{n=a}^{b-1} f(n) = S + f(a) - f(b) \le \int_a^b f \le S(f, D) = \sum_{n=a+1}^{b} f(n) = S\ .$$

Tedy $S \le \int_a^b f \le S + 1 \cdot (f(b) - f(a))$ a vzhledem k $f(b) - f(a) \ge 0$ je rovnost dokázána

Druhý důkaz. Opět předpokládáme, že funkce f neklesá, pro nerostoucí f je důkaz opět podobný (úloha 2.1.39). Máme tedy dokázat nerovnosti

$$0 \le \sum_{a<n\le b} f(n) - \int_a^b f \le f(b) - f(a)\ .$$

Jsou takzvaně aditivní, když je dokázeme jen pro $a = i$ a $b = i + 1$, plyne sečtením platnost pro obecné a, b:

$$\sum_{i=a}^{b-1} \left(0 \le \sum_{i<n\le i+1} f(n) - \int_i^{i+1} f \le f(i+1) - f(i) \right)$$

skutečně dává díky tvrzení 2.1.35 přesně dokazované nerovnosti. □

Úloha 2.1.38. *Přizpůsobte první důkaz nerostoucí funkci f.*

Úloha 2.1.39. *Přizpůsobte druhý důkaz nerostoucí funkci f.*

Rafinovanějším počítáním s integrály lze odvodit[2] přesnou asymptotiku faktoriálu, tzv. *Stirlingovu formuli*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,\ n \to \infty\ .$$

Podobně lze odhadovat i nekonečné řady a jejich součty, ale k tomu jsou třeba integrály přes nekonečné intervaly. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $f:\ [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, kde $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pro každé $b > a$, položíme

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f\ ,$$

pokud tato limita existuje (povolíme i nevlastní hodnotu limity).

Tvrzení (integrální kritérium konvergence). *Nechť a je celé číslo a funkce $f:\ [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na $[a, +\infty)$ nezáporná a nerostoucí. Pak*

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots < +\infty \iff \int_a^{+\infty} f < +\infty\ .$$

[2] Odvození se najde třeba v mém textu *Kombinatorické počítání* na `http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/kpoc99.ps`

Řada tedy konverguje, právě když konverguje odpovídající integrál.

Důkaz. Posloupnost částečných součtů řady je neklesající a její limita tedy existuje a je vlastní nebo $+\infty$. Díky monotonii f je $f \in \mathcal{R}(a,b)$ pro každé reálné $b > a$. Díky nezápornosti f je $\int_a^{b'} f \geq \int_a^b f$, jakmile $b' \geq b$. Podobně tedy $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$ existuje a je vlastní nebo $+\infty$. Pro celé číslo $b > a$ vezmeme dělení $D = (a, a+1, a+2, \ldots, b)$ intervalu $[a,b]$. Máme nerovnosti

$$\sum_{i=a+1}^{b} f(i) = s(f,D) \leq \int_a^b f \leq S(f,D) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i) \; .$$

Z nich je jasné, že omezenost posloupnosti částečných součtů řady implikuje omezenost hodnot integrálů $\int_a^b f$ pro každé reálné $b > a$ a naopak. Obě limity jsou tedy současně vlastní nebo současně $+\infty$. □

V prvním příkladu na aplikaci tohoto kritéria rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 0 \; .$$

Pro $s \neq 1$ je

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_1^{+\infty} = (1-s)^{-1}(\lim_{x\to+\infty} x^{1-s} - 1) \; ,$$

což se rovná $+\infty$ pro $0 < s < 1$ a $(s-1)^{-1}$ pro $s > 1$ (proč?). Pro $s = 1$ je

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \log x|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \; .$$

Podle integrálního kritéria tedy řada konverguje, právě když $s > 1$. V druhém příkladu rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \; .$$

Zde

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = \log\log x|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \log\log x - \log\log 2 = +\infty \; .$$

Podle integrálního kritéria tedy řada diverguje. Cvičení: rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n\geq 2} 1/n(\log n)^s$, $s > 1$.

Integrálem jsme faktoriál $n!$ odhadli a nyní ukážeme, opět s pomocí integrálu, jak lze $n!$ rozšířit při zachování rekurence $n! = n \cdot (n-1)!$ na funkci definovanou na celém intervalu $[1, +\infty)$.[3]

[3]Následující klasická integrální definice funguje na větším intervalu $x \in (0, +\infty)$, ale pro jednoduchost (pro $x < 1$ je nutné integrál i u dolní integrační meze 0 definovat limitou) se omezujeme na menší interval $x \in [1, +\infty)$.

Tvrzení (funkce Gamma). *Funkce*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt :\ [1,+\infty) \to (0,+\infty)$$

splňuje na intervalu $[1,+\infty)$ *funkcionální rovnici*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ .$$

Máme $\Gamma(1) = 1$ *a* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro celá čísla* $n \geq 2$.

Důkaz. Ukažme, že $\Gamma(x)$ je korektně definovaná. Pro každé pevné $x \geq 1$ je integrand nezáporná spojitá funkce (pro $x = 1$ a $t = 0$ klademe $0^0 = 1$). Protože $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$ (exponenciála porazí polynom), pro každé $t \in [0,+\infty)$ máme nerovnost

$$t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} \leq ce^{-t/2}\ ,$$

kde $c > 0$ je konstanta závisející jen na x. Integrály přes konečné intervaly $[0,b]$ jsou tedy definované, pro $b \to +\infty$ neklesají a mají vlastní limitu:

$$\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\, dt \leq \int_0^b ce^{-t/2} = c(1 - e^{-b/2}/2)\, dt < c\ .$$

Hodnota $\Gamma(x)$ je tak korektně definovaná pro každé $x \geq 1$. Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = (-e^{-t})|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1\ .$$

Funkcionální rovnici odvodíme integrací per partes:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = t^x(-e^{-t})|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})\, dt \\
&= 0 - 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt \\
&= x\Gamma(x)\ .
\end{aligned}$$

Hodnoty $\Gamma(n)$ z ní plynou indukcí. □

Ještě tři poznámky k funkci $\Gamma(x)$. Zaprvé, samotné rozšíření faktoriálu vyřešením rekurence $f(x+1) = xf(x)$ nějakou funkcí $f:\ [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ není nic zázračného a dá se udělat jednoduše i bez integrálů. Vezmeme si funkci f definovanou na $[1,2)$ jako $f(1) = 1$ a jinak úplně libovolně, například jako $f(x) = 1$, a na celý interval $[1,+\infty)$ ji protáhneme právě pomocí vztahu $f(x+1) = xf(x)$. Pro $f = 1$ na $[1,2)$ tak dostaneme $f(x) = x-1$ na $[2,3)$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ na $[3,4)$ a tak dál. Tato funkce splňuje na $[1,+\infty)$ rovnici $f(x+1) = xf(x)$ a $f(1) = 1$, takže i $f(n) = (n-1)!$. Dokonce je na definičním intervalu spojitá.

Její graf však nevypadá moc hezky, protože v bodech $2, 3, 4, \ldots$ má „špičky“ — f v nich nemá derivaci (má různé jednostranné derivace). Pokud navíc po $f(x)$ chceme, aby na $[1, +\infty)$ měla první derivaci, popřípadě i další derivace, tak tato jednoduchá konstrukce nestačí. Pak se musíme obrátit ke $\Gamma(x)$, o níž se dá ukázat, že na $[1, +\infty)$ má derivace všech řádů. Zadruhé, bylo by hezčí mít rozšíření faktoriálu splňující přímo vztah $f(n) = n!$. Z tohoto hlediska je hořejší definice funkce $\Gamma(x)$ trochu nešikovná. Vznikla však historicky, stejně jako název funkce, a již je zavedená (a nelze s tím nic udělat). Zatřetí, jaké jsou nějaké další hodnoty $\Gamma(x)$, kromě bodů $x = 1, 2, 3, \ldots$? Dá se třeba spočítat, že

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.8862\ldots\ .$$

Funkce $\Gamma(x)$ splňuje řadu dalších zajímavých vztahů a identit.

Jako závěrečnou aplikaci integrálu připomeneme vzorce pro plochu, délku křivky a objem rotačního tělesa. Plochu rovinného útvaru $U(a, b, f)$ (jsou to body (x, y) v rovině splňující $a \le x \le b$ a $0 \le y \le f(x)$) pod grafem funkce f jsme víceméně definovali jako $\int_a^b f$.

Pro funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ můžeme délku jejího grafu $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}$ jakožto oblouku křivky definovat jako limitu délek lomených čar L spojujících konce G a s body zlomu na G, když délka nejdelší úsečky v L jde k 0. Když je f pěkná funkce, například f' je spojitá, tato limita existuje a můžeme ji spočítat R. integrálem. Úsečka v L spojující body $(x, f(x))$ a $(x+\Delta, f(x+\Delta))$ má podle Pythagorovy věty délku

$$\sqrt{\Delta^2 + (f(x+\Delta) - f(x))^2} = \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}\right)^2}\ ,$$

a hodnota zlomku je podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě rovna $f'(\alpha)$ v nějakém mezibodě α (ležícím mezi x a $x + \Delta$). Délka lomené čáry L tak je vlastně přímo Riemannova suma pro jisté dělení intervalu $[a, b]$ s body a funkci $\sqrt{1 + (f'(t))^2}$. Dostáváme následující vzorec.

Tvrzení (délka oblouku křivky). *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou derivaci f' (takže $\sqrt{1 + (f')^2} \in \mathcal{R}(a, b)$). Pak*

$$\text{délka}(\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\ .$$

Pro podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^3$ trojrozměrného prostoru můžeme její objem definovat jako limitu, pro $n \to \infty$, součtu objemů $1/n^3$ krychliček K v množině

$$\{K = [\tfrac{a}{n}, \tfrac{a+1}{n}] \times [\tfrac{b}{n}, \tfrac{b+1}{n}] \times [\tfrac{c}{n}, \tfrac{c+1}{n}] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\ \&\ K \subset M\}\ .$$

Je-li M hezká, tato limita existuje a můžeme ji spočítat integrálem. Uvedeme si jeden speciální případ.

Tvrzení (objem rotačního tělesa). *Nechť* $f \in \mathcal{R}(a,b)$ *a* $f \geq 0$ *na* $[a,b]$. *Pro objem rotačního tělesa*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \;\&\; \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$$

vzniklého rotací (v $\mathbb{R}^3$*) rovinného útvaru* $U(a,b,f)$ *pod grafem funkce* f *kolem osy* x *platí vztah*

$$\mathrm{objem}(V) = \pi \int_a^b f(t)^2 \, dt \; .$$

Vzorec se dostane rozřezáním V rovinami kolmými na osu x na plátky tloušťky $\Delta > 0$ a sečtením jejich objemů. Objem plátku mezi rovinami kolmými v bodech $(x,0,0)$ a $(x+\Delta,0,0)$ je přibližně $\pi f(x)^2\Delta$, neboť to je zhruba válec s (kruhovou) podstavou o poloměru $f(x)$ a výškou Δ.

Cvičení: pomocí prvního vzorce spočtěte délku obvodu kružnice a pomocí druhého objem koule.

2.2 Riemannův integrál pro obecný interval

Rozšíření R. integrálu na obecný interval. R. integrál přes obecný interval jako limita R. integrálů přes kompaktní podintervaly. Dva tvary Frullaniho integrálů. Jejich příklady.

Limitní přechod rozšíří Riemannův integrál funkcí $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na kompaktních intervalech na funkce definované na jakémkoli intervalu.

Definice 2.2.1 ($\int$ na nekompaktním intervalu). *Nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je nekompaktní interval a* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je funkce. Řekneme, že* f *má na* I *Riemannův integrál* $\int_I f \in \mathbb{R}$ *a píšeme* $f \in \mathcal{R}(I)$*, když (i)* $f \in \mathcal{R}(a,b) = \mathcal{R}([a,b])$ *pro každá dvě čísla* $a,b \in I$ *s* $a < b$ *a (ii) pro každé* $\varepsilon > 0$ *existují dvě čísla čísla* $a,b \in I$ *s* $a < b$ *tak, že pro každá dvě čísla* $c,d \in I$ *s* $c \leq a < b \leq d$ *je*

$$\left| \int_I f - \int_c^d f \right| < \varepsilon \; .$$

Je-li I' „interval" vzniklý výměnou mezí skutečného nekompaktního intervalu I, například $I = (-1,+\infty)$ a $I' = (+\infty,-1)$, klademe stejně jako pro integrály na kompaktních intervalech

$$\int_{I'} f := -\int_I f \; ,$$

pokud poslední integrál existuje. Místo značení $\int_I f$ budeme spíše používat hutnější, ovšem méně přesné, značení $\int_a^b f$ mezemi a a b intervalu I. Třeba místo

$$\int_{(0,+\infty)} f \;\; \text{budeme psát} \;\; \int_0^{+\infty} f$$

a nebude nám vadit, že odtud není jasné, jestli integrační interval je $(0, +\infty)$ nebo $[0, +\infty)$.

Úloha 2.2.2. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ je r. integrovatelná na každém kompaktním podintervalu intervalu $[a,+\infty)$. Dokažte, že vlastní*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = \int_a^{+\infty} f \ ,$$

je-li jedna strana definovaná.

Podobně lze vyjádřit každý R. integrál funkce definované na nekompaktním intervalu jako limitu R. integrálů jejích zúžení na vhodné kompaktní podintervaly:

Úloha 2.2.3. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je nekompaktní interval, funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je r. integrovatelná na každém jeho kompaktním podintervalu a $(I_n) = ([a_n, b_n])$ je taková posloupnost kompaktních podintervalů intervalu I, že $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$. Dokažte, že pak vlastní*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f = \int_I f \ ,$$

je-li jedna strana definovaná.

Věta 2.2.4 (první tvar Frullaniho integrálů). *Nechť*

$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \ ,$$

pro každá dvě čísla $a, b \in (0, +\infty)$ s $a < b$ je $f \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ a existují vlastní limity

$$f(0) := \lim_{x\to 0} f(x) \ \text{ a } \ f(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} f(x) \ .$$

Pak následující integrál existuje a

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} = \log(\alpha/\beta) \cdot (f(+\infty) - f(0)) \ .$$

Důkaz. Záměnou α a β můžeme dosáhnout, že $\alpha \geq \beta > 0$ (úloha 2.2.5). Pak si označíme $\lambda = \log(\alpha/\beta) \geq 0$ a pro pravou stranu dokazované identity máme vyjádření

$$\lambda\,(f(+\infty) - f(0)) = \lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+\lambda} f(e^u) - \lim_{B\to+\infty} \int_{B-\lambda}^{B} f(e^{-u}) \ .$$

Tato rovnost plyne ze zachování riemannovské integrovatelosti při skládání funkcí (tvrzení **??**), z monotonie integrálů (tvrzení **??**) a z existence limit $f(0)$ a

$f(+\infty)$. Substitucemi $e^u = t$ a $e^{-u} = t$ rozdíl integrálů napíšeme podle tvrzení **??** jako

$$\lim_{h\to+\infty}\int_h^{\alpha h/\beta}\frac{f(t)}{t} - \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{\alpha\delta/\beta}\frac{f(t)}{t}$$

($h = e^A$ a $\delta = 1/e^B$). To se podle tvrzení **??** rovná

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to+\infty,\,\delta\to 0^+}\left(\int_\delta^{\alpha h/\beta}\frac{f(t)}{t} - \int_\delta^{h}\frac{f(t)}{t} - \int_\delta^{\alpha h/\beta}\frac{f(t)}{t} + \int_{\alpha\delta/\beta}^{\alpha h/\beta}\frac{f(t)}{t}\right)\\ &= \lim_{h\to+\infty,\,\delta\to 0^+}\left(\int_{\alpha\delta/\beta}^{\alpha h/\beta}\frac{f(t)}{t} - \int_\delta^{h}\frac{f(t)}{t}\right).\end{aligned}$$

Další substituce $t = \alpha x$ a $t = \beta x$ už podle tvrzení **??** dávají náš integrál, levou stranu dokazované identity:

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to+\infty,\,\delta\to 0^+}\left(\int_{\delta/\beta}^{h/\beta}\frac{f(\alpha x)}{x} - \int_{\delta/\beta}^{h/\beta}\frac{f(\beta x)}{x}\right)\\ &= \lim_{h\to+\infty,\,\delta\to 0^+}\int_{\delta/\beta}^{h/\beta}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x} = \int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,.\end{aligned}$$

Přísně vzato, limitu funkce dvou proměnných h a δ jsme v *MA I* nedefinovali a neprobírali a poslední rovnost přesně neodpovídá úloze 2.2.3 a neplyne z ní. To se ale snadno spraví, když h a δ vyložíme jako posloupnosti $h = h(n) = n$ a $\delta = \delta(n) = 1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$. □

Úloha 2.2.5. *Jak přesně funguje argument se záměnou α a β?*

2.3 Vícerozměrný Riemannův integrál a Fubiniova věta

Boxy, jejich objemy a dělení. Zobecnění obou definic Riemannova integrálu.

Zobecníme Riemannův integrál pro funkce více proměnných a dokážeme větu popisující redukci na jednorozměrné integrály a chování při změnách pořadí integračních proměnných. Jako aplikaci pak v tvrzení 2.3.6 odvodíme Gaussův integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,,$$

který se nám bude hodit v druhém odvození Stirlingovy formule v oddílu 2.6. Začneme ale definicí obdoby intervalů $[a, b]$ ve více rozměrech.

Definice 2.3.1 (Box, jeho objem a podbox). *Box, přesněji n-rozměrný box $I \subset \mathbb{R}^n$, je kartézský součin intervalů*

$$I = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times \cdots \times [a_n,\, b_n]\ ,$$

kde $a_i < b_i$ jsou reálná čísla. Objem $|I|$ boxu I je kladné reálné číslo

$$|I| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ .$$

Pokud $a_i \le c_i < d_i \le b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, nazveme box

$$J = [c_1,\, d_1] \times [c_2,\, d_2] \times \cdots \times [c_n,\, d_n]$$

podboxem boxu I.

Například v rovině $\mathbb{R}^2$ je box I uzavřený obdélník, jehož strany mají kladné délky a jsou rovnoběžné se souřadnými osami . Objem I je roven plošnému obsahu. Podbox J je každý další takový uzavřený obdélník obsažený v Im.

Definice 2.3.2 (dělení boxu s body a jeho norma). *Dělení D boxu $I \subset \mathbb{R}^n$ na podboxy je množina boxů*

$$D = \{[c_1^{j_1},\, c_1^{j_1+1}] \times [c_2^{j_2},\, c_2^{j_2+1}] \times \cdots \times [c_n^{j_n},\, c_n^{j_n+1}] \mid 0 \le j_i < k_i,\, 1 \le i \le n\}\ ,$$

kde $a_i = c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{k_i-1} < c_i^{k_i} = b_i$ jsou nějaká dělení intervalů $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Norma dělení

$$\lambda(D) := \max_{1 \le i \le n,\, 0 \le j < k_i} (c_i^{j+1} - c_i^j)$$

je maximální délka hrany podboxu. Dělení D boxu I s body ζ je dvojice (D, ζ), kde D je dělení boxu I a $\zeta :\ D \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení splňující $\zeta(J) \in J$ pro každý podbox J.

Zobecníme teď obě definice Riemannova integrálu.

Definice 2.3.3 (zobecněná 1. definice). *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box, (D, ζ) je jeho dělení s body a $f \colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Riemannovský součet (pro funkci f a dělení s body (D, ζ)) je teď definován jako*

$$S(f,\, D,\, \zeta) = \sum_{J \in D} |J| \cdot f(\zeta(J))\ .$$

Integrál funkce f přes box I je vlastní limita

$$\int_I f := \lim_{(D,\, \zeta),\, \lambda(D) \to 0} S(f,\, D,\, \zeta)\ ,$$

existuje-li: $\int_I f \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, (D,\, \zeta) :\ \lambda(D) < \delta \Rightarrow \left| \int_I f - S(f,\, D,\, \zeta) \right| < \varepsilon\ .$$

Definice 2.3.4 (zobecněná 2. definice). *Nechť D je dělení boxu I a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak, jako dříve, definujeme pro každý podbox J tohoto dělení veličiny $m(J) = \inf_{x\in J} f(x)$, $M(J) = \sup_{x\in J} f(x)$ a dolní, resp. horní, součet*

$$s(f,\,D) = \sum_{J\in D} |J|\cdot m(J),\quad \textit{resp.}\quad S(f,\,D) = \sum_{J\in D} |J|\cdot M(J)\;.$$

Dolní, resp. horní, integrál je

$$\underline{\int_I} f = \sup(\{s(f,\,D) \mid D \textit{ je dělení } I\})\;,$$

resp.

$$\overline{\int_I} f = \inf(\{S(f,\,D) \mid D \textit{ je dělení } I\})\;.$$

Opět jako v jedné dimenzi platí, že pro každá dvě dělení D, E boxu I je

$$-\infty \le s(f,\,D) \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le S(f,\,E) \le +\infty\;.$$

Integrál funkce f přes box I pak definujeme jako reálné číslo

$$\int f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f \in \mathbb{R}\;,$$

když se dolní a horní integrál rovnají společné konečné hodnotě.

Platí: f má $\int$ podle Riemannovy definice $\iff$ f má $\int$ podle Darbouxovy definice, a v případě existence integrálu se obě hodnoty rovnají. Množinu funkcí riemannovsky integrovatelných přes box I označíme jako

$$\mathcal{R}(I) = \{f \mid f \text{ má Riemannův integrál přes } I\}\;.$$

Lebesgueova věta. Řekneme, že množina $E \subset \mathbb{R}^n$ má (n-rozměrnou Lebesgueovu) míru 0, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost boxů $I_1, I_2, \ldots$ v $\mathbb{R}^n$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon \quad\text{a}\quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\;.$$

Věta (Lebesgueova). *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $f:\ I \to \mathbb{R}$ je na něm definovaná fukce. Pak $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ je na I omezená a množina jejích bodů nespojitosti má míru* 0.

Například každá omezená funkce $f:\ I \to \mathbb{R}$ nespojitá pouze ve spočetně mnoha bodech má Riemannův $\int_I f$. Z Lebesgueovy věty a definice integrálu dostáváme (dokažte si to jako úlohu 1):

Důsledek. *Když $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce, jež je na boxu $I \subset \mathbb{R}^n$ nezáporná a $\int_I f = 0$, potom $f = 0$ na I až na množinu bodů s mírou 0.*

Fubiniova věta. (Přesněji, věta Fubiniova typu.) Umožňuje převést výpočet vícerozměrného integrálu na posloupnost obyčejných jednorozměrných integrálů. Nechť $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ a $Z = X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ je m-rozměrný, n-rozměrný a $(m+n)$-rozměrný box.

Věta (Fubiniova). *Nechť $f: Z = X \times Y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(Z)$. Pak všechny tři integrály*

$$\int_Z f,\ \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy \right) dx \quad a \quad \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx \right) dy$$

existují a rovnají se.

Vysvětlíme značení a smysl věty. Integrál $\int_Z f$ existuje podle předpokladu o f. Definujeme funkci

$$F: X \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_Y f(x,y)\,dy\ ;$$

pokud pro nějaké $x = x_0 \in X$ tento integrál neexistuje, definujeme $F(x_0)$ jako libovolnou hodnotu z intervalu $[\underline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy, \overline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy]$. Podobným způsobem definujeme funkci

$$G: Y \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_X f(x,y)\,dx\ .$$

Fubiniova věta říká, že $F \in \mathcal{R}(X)$, $G \in \mathcal{R}(Y)$ a $\int_Z f = \int_X F = \int_Y G$. Z důkazu též vyplyne (úloha 6), že množina bodů $x_0 \in X$ s $f(x_0,y) \notin \mathcal{R}(Y)$ má míru 0, a podobně v y-ové souřadnici.

Důkaz. Dokážeme, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_Z f = \int_X F$, pro funkci G je důkaz podobný. Každé dělení D boxu Z je „součinem“ $D_1 \times D_2$ dělení D_1 boxu X a dělení D_2 boxu Y, to jest každý box $J \in D$ je součinem $J = J_1 \times J_2$ pro $J_1 \in D_1$, $J_2 \in D_2$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje dělení D boxu Z, že $s(f,D) > \int_Z f - \varepsilon$. Vezmeme dělení D_1 a D_2, že D„=“$D_1 \times D_2$. Pak podle vlastností infima platí, že

$$\begin{aligned}
s(f,D) &= \sum_{J \in D} |J| \cdot \inf_{z \in J} f(z) = \sum_{J \in D} \overbrace{|J_1 \times J_2|}^{=|J_1|\cdot|J_2|} \cdot \inf_{x \in J_1, y \in J_2} f(x,y) \\
\text{(proč? — úloha 2)} &\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} \Bigg(\underbrace{\sum_{J_2 \in D_2} |J_2| \inf_{y \in J_2} f(x,y)}_{=s(f(x,\cdot),D_2) \leq \underline{\int_Y} f(x,y)\,dy \leq F(x)} \Bigg) \\
&\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} F(x) = s(F, D_1)\ .
\end{aligned}$$

Takže $s(F, D_1) > \int_Z f - \varepsilon$. Analogicky se dokáže, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_1' boxu X, že $S(F, D_1') < \int_Z f + \varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ to podle Darbouxovy definice integrálu znamená, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_X F = \int_Z f$. □

Příklad 2.3.5. *Nechť $f(x, y, z) = z\sin(x+y)$ a box $I \subset \mathbb{R}^3$ je dán nerovnostmi $0 \le x \le \pi$, $|y| \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le z \le 1$. Spočítáme*

$$\int_I f = \int_I z\sin(x+y)\ .$$

Podle Fubiniovy věty,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_I f(x,\, y\,, z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi} z\sin(x+y)\,dx\right) dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-z\cos(x+y)|_{x=0}^{\pi})\,dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y\,dy\right) dz \\
&= \int_0^1 (2z\sin y|_{y=-\pi/2}^{\pi})\,dz = \int_0^1 4z\,dz \\
&= 2\ .
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 2.3.6 (Gaussův $\int$). *Platí identita*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\ ,$$

Důkaz.

□

Integrál přes množinu $E \subset \mathbb{R}^n$. Integrál rozšíříme z boxů na obecnější množiny. Zavedeme i objem množiny. Množina $E \subset \mathbb{R}^n$ je *přípustná*, když je omezená a její hranice ∂E (což jsou ty body $x \in \mathbb{R}^n$, že každé okolí x protíná jak E tak $\mathbb{R}^n \backslash E$) má míru 0. Například krychle, otevřená či uzavřená koule jsou přípustné množiny, kdežto $\mathbb{Q} \cap [0,1]^n$ není přípustná množina. *Objem* omezené množiny $E \subset \mathbb{R}^n$ je integrál (když existuje)

$$\mathrm{vol}(E) := \int_I \chi_E\ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující E a χ_E je charakteristická funkce množiny E (takže $\chi_E(x) = 1$ pro $x \in E$ a $\chi_E(x) = 0$ pro $x \in I \backslash E$). Dá se dokázat:

Tvrzení. *$E \subset \mathbb{R}^n$ má objem $\iff$ E je přípustná.*

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je omezená. *Integrál funkce $f: E \to \mathbb{R}$ přes E* definujeme jako

$$\int_E f := \int_I \overline{f} \ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující E a $\overline{f}$ je rozšíření f:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \ldots \quad x \in E \\ 0 & \ldots \quad x \in I \backslash E \ . \end{cases}$$

Tato definice (jakož i definice objemu) je korektní: úloha 7.

Úlohy

1. Dokažte důsledek Lebesgueovy věty.
2. Proč platí ta nerovnost v důkazu Fubiniovy věty?
3. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a D je jeho dělení. Dokažte, že $|I| = \sum_{J \in D} |J|$.
4. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $I = \bigcup_{i=1}^k J_i$ je sjednocení boxů, které mají disjunktní vnitřky. Dokažte, že $|I| = \sum_{i=1}^k |J_i|$.
5. Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je neomezená funkce definovaná na boxu v $\mathbb{R}^n$. Co se stane v Riemannově definici integrálu? Jak vypadají $\underline{\int_I} f$ a $\overline{\int_I} f$?
6. Zdůvodněte, proč ve Fubiniově větě množina
   $$\{x_0 \in X \mid \textstyle\int_Y f(x_0, y)\, dy \text{ neexistuje}\}$$
   má míru nula.
7. Zdůvodněte, proč objem $\mathrm{vol}(E)$ a integrál $\int_E f$ pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ nezávisejí na volbě boxu I obsahujícího E (když existují).
8. Dokažte, že pro každý box $I \subset \mathbb{R}^n$ je $|I| = \mathrm{vol}(I)$.

2.4 Riemannův–Stieltjesův integrál

Věta 2.4.1 (substituce v R.–S. integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}(a, b)$ má*

2.5 Newtonův integrál $(N)\int$

Definice Newtonova integrálu a jeho existence. Hakeova věta. Srovnání $(N)\int$ a $(R)\int$. Linearita a aditivita, monotonie, integrace per partes a substituční pravidlo. Fubiniova věta pro obdélníky. Fubiniova věta pro kvadrant.

Předností $(N)\int$ je jednoduchá algebraické definice a věrné zachycení počítání s integrály. Vybudujeme zde jeho teorii, abychom ji v oddílu 2.6 mohli použít k odvození Stirlingovy asymptotické formule pro $n!$, k čemuž plně dostačuje. Po definici ho porovnáme s Riemannovým integrálem. Pak odvodíme jeho základní vlastnosti, jež kulminují Fubiniovou větou 2.5.8 pro Newtonův integrál přes první kvadrant.

Definice 2.5.1 (Newtonův $\int$). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ s $a < b$ jsou reálná čísla nebo $\pm\infty$. Funkce $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) Newtonův integrál $(N)\int_a^b f$, pokud má f na (a, b) primitivní funkci F a existují vlastní limity*

$$F(a^+) := \lim_{x\to a} F(x) \in \mathbb{R} \ \ a \ \ F(b^-) := \lim_{x\to b} F(x) \in \mathbb{R}\;.$$

Jeho hodnotu pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f = F(b^-) - F(a^+)$$

a klademe také

$$(N)\int_b^a f := -(N)\int_a^b f\;.$$

Pokud primitivní funkce k f neexistuje (což podle věty 1.1.17 nastane vždy, když f nenabývá všechny mezihodnoty) nebo neexistuje či je nekonečná jedna z limit $F(a^+)$ a $F(b^-)$, není $(N)\int_a^b f$ definován.

Tvrzení 2.5.2 (existence $(N)\int$). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak*

$$(N)\int_a^b f$$

existuje

Důkaz. Podle důsledku 1.1.16 má f na intervalu $[a, b]$, tedy i na (a, b), primitivní funkci F. Ta je podle tvrzení 1.1.6 na $[a, b]$ spojitá, takže její limity v a i v b se rovnají jejím funkčním hodnotám a $(N)\int f$ existuje. □

Tvrzení 2.5.3 (Hakeova věta). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce. Je-li ve formuli*

$$(N)\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} (N)\int_a^c f$$

jedna strana definovaná a konečná, platí totéž pro druhou a obě se rovnají. Analogické tvrzení platí i pro limitu s $c \to a^+$.

Důkaz. Je-li levá strana formule definovaná a konečná, rovná se $F(b^-)-F(a^+)$, kde F je na (a,b) primitivní k f. Pro každé $c \in (a,b)$ pak pro (zúžené) funkce f and F existuje $(N)\int_a^c f$ a rovná se $F(c^-) - F(a^+) = F(c) - F(a^+)$ díky spojitosti F v c. Limitní přechod $c \to b^-$ pak ukazuje, že i pravá strana formule se rovná $F(b^-) - F(a^+)$.

Je-li pravá strana formule definovaná a konečná, pro každé $c \in (a,b)$ existuje funkce F_c primitivní na (a,c) k (zúžení) f, $(N)\int_a^c f = F_c(c^-) - F_c(a^+)$ a tento výraz má vlastní limitu pro $c \to b^-$. Ze základní vlastnosti primitivních funkcí (druhá část tvrzení 1.1.3) plyne, že můžeme vzít primitivní funkce F_c tak, že splňují $F_c(a^+) = 0$, a že každé dvě takové funkce se shodují na průniku svých definičních oborů. Pak korektně definovaná funkce

$$F = \bigcup_{c\in(a,\,b)} F_c$$

je na (a,b) primitivní k f. Tedy

$$\begin{aligned}\lim_{c\to b^-}(N)\int_a^c f &= \lim_{c\to b^-}(F_c(c^-) - F_c(a^+)) = \lim_{c\to b^-} F_c(c^-) - 0\\ &= \lim_{c\to b^-} F(c) - 0 = F(b^-) - F(a^+) = (N)\int_a^b f\end{aligned}$$

a levá strana formule se rovná pravé (v tomto výpočtu postup od známých veličin k neznámým jde zleva doprava). Nicméně viz ještě úlohu 2.5.4. □

Úloha 2.5.4. *Proč přesně platí třetí rovnost v předešlém výpočtu?*

Nyní porovnáme Newtonův integrál s Riemannovým, který odlišíme značením $(R)\int_a^b f$. Nechť $\mathcal{N}(a,b)$ (resp. $\mathcal{R}(a,b)$) jsou funkce newtonovsky (resp. riemannovsky) integrovatelné na daném intervalu a $\mathcal{C}(a,b)$ jsou funkce na daném intervalu spojité. Jeho přesný typ, zda jde o $[a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$ a podobně, je nutno odvodit z kontextu.

Věta 2.5.5 (srovnání $(N)\int$ a $(R)\int$). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$ s $a < b$. Riemannův a Newtonův integrál přes zadaný interval mají následující vzájemné vztahy.*

1. *Pro $a,b \in \mathbb{R}$ mají funkce spojité na intervalu $[a,b]$ oba integrály, takže*

$$\mathcal{C}(a,\,b) \subset \mathcal{R}(a,\,b) \cap \mathcal{N}(a,\,b)\ .$$

2. *Jejich hodnoty vycházejí stejně, pro každý přípustný interval daný prvky a,b (viz důkaz) platí:*

$$f \in \mathcal{R}(a,\,b) \cap \mathcal{N}(a,\,b) \Rightarrow (R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f\ .$$

3. Oba integrály jsou vzájemně neporovnatelné. Pro každý přípustný interval daný prvky a, b (viz důkaz) existují funkce, které mají jeden, ale ne druhý,

$$\mathcal{R}(a,\, b) \setminus \mathcal{N}(a,\, b) \neq \emptyset \ \ i \ \ \mathcal{N}(a,\, b) \setminus \mathcal{R}(a,\, b) \neq \emptyset \ .$$

Důkaz. 1. Pro kompaktní interval $[a, b]$ jsme náležení $\mathcal{C}(a,\, b) \subset \mathcal{N}(a,\, b)$ už dokázali v tvrzení 2.5.2. Náležení $\mathcal{C}(a,\, b) \subset \mathcal{R}(a,\, b)$ je dokázané v tvrzení 2.1.33.

2. Nejprve probereme intervaly tvaru $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, a $[a, b) = [a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$. Pak máme funkci F primitivní na (a, b) k f a

$$\begin{aligned}
(N)\int_a^b f &= F(b^-) - F(a^+) \\
&= \lim_{c \to b^-} \lim_{d \to a^+} (F(c) - F(d)) = \lim_{c \to b^-} \lim_{d \to a^+} (R)\int_d^c f \\
&= \lim_{c \to b^-} (R)\int_a^c f = (R)\int_a^b f \ .
\end{aligned}$$

V první rovnosti jsme použili definici $(N)\int$, ve druhé definice výrazů $F(a^+)$ a $F(b^-)$, ve třetí druhou Základní větu analýzy (věta 2.1.36) a ve čtvrté a páté Hakeovu větu pro $(R)\int$ (tvrzení **??**). Pro intervaly tvaru $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, je argument velmi podobný. Uvedeme ho ještě, teď už stručně bez zdůvodnění (úloha 2.5.6), pro interval $(-\infty, +\infty)$. Nechť $f \in \mathcal{R}(-\infty, +\infty) \cap \mathcal{N}(-\infty, +\infty)$. Pak

$$\begin{aligned}
(N)\int_{-\infty}^{+\infty} f &= F(+\infty^-) - F(-\infty^+) \\
&= \lim_{c \to +\infty} \lim_{d \to -\infty} (F(c) - F(d)) = \lim_{c \to +\infty} \lim_{d \to -\infty} (R)\int_d^c f \\
&= \lim_{c \to +\infty} (R)\int_{-\infty}^c f = (R)\int_{-\infty}^{+\infty} f \ .
\end{aligned}$$

3. Nechť $c \in [a, b]$ leží uvnitř intervalu $[a, b]$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je definovaná jako $f(x) = 0$ pro $x \neq c$ a $f(c) = 1$. Pak zřejmě $f \in \mathcal{R}(a, b)$, ale f podle věty 1.1.17 nemá na $[a, b]$ primitivní funkci a $f \notin \mathcal{N}(a, b)$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a uvažme funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definovanou jako $f(a) = 0$ a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}} \ \text{ pro } \ x > a \ .$$

Pak $F(x) = 2\sqrt{x-a}$ je na (a, b) primitivní k f a vidíme, že $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Ovšem $f \notin \mathcal{R}(a, b)$, protože f není omezená (tvrzení 2.1.11). □

Úloha 2.5.6. *Zdůvodněte jednotlivé kroky hořejšího výpočtu dokazujícího rovnost hodnot Newtonova a Riemannova integrálu přes $\mathbb{R}$.*

Tvrzení 2.5.7 (linearita a aditivita). *Pro $a, b \in \mathbb{R}^*$ s $a < b$ předpokládejme, že integrály $(N)\int_a^b f$ and $(N)\int_a^b g$ existují. Pak platí následující.*

1. *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ má funkce $h = \alpha f + \beta g$ Newtonův integrál přes (a, b) a*
$$(N)\int_a^b h = \alpha \cdot (N)\int_a^b f + \beta \cdot (N)\int_a^b g\ .$$

2. *Pro každé $c \in (a, b)$ integrály $(N)\int_a^c f$ a $(N)\int_c^b f$ existují a*
$$(N)\int_a^b f = (N)\int_a^c f + (N)\int_c^b f\ .$$

Důkaz. 1. Když F a G jsou na (a, b) primitivní po řadě k f a g, pak $\alpha F + \beta G$ je na (a, b) primitivní k $\alpha f + \beta g$. Pak použijeme linearitu funkční limity v a^+ a v b^-.

2. Je-li F na (a, b) primitivní k f, je (přesněji, její zúžení) primitivní k (zúžené) f také na (a, c) a na (c, b). Integrály $(N)\int_a^c f$ a $(N)\int_c^b f$ existují, protože
$$\lim_{x\to c^+} F(x) = \lim_{x\to c^-} F(x) = F(c)$$
díky spojitosti F v c. Rovněž $F(b^-) - F(a^+) = (F(b^-) - F(c^+)) + (F(c^-) - F(a^+))$, což dává uvedenou rovnost. □

Věta 2.5.8 (Fubiniova pro kvadrant). *Nechť $c > 0$ je konstanta a*
$$f = f(x,\, y)\colon [0,\, +\infty) \times [0,\, +\infty) \to \mathbb{R}$$
je taková spojitá funkce, že
$$|f(x,\, y)| \le c \max(x,\, y)^{-3}\ ,$$
kdykoli $\max(x, y) \ge 1$. Pak následující dva iterované Newtonovy integrály existují a rovnají se:
$$(N)\int_0^{+\infty} \left((N)\int_0^{+\infty} f(x,\, y)\, dy \right) dx = (N)\int_0^{+\infty} \left((N)\int_0^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right) dy\ .$$

Důkaz. Pro $y, b > 0$ definujeme $I(y, b) = (N)\int_0^b f(x, y)\, dx$, tento integrál existuje díky Důsledku **??**. Ukážeme, že druhý iterovaný Newtonův integrál existuje. For any fixed $y > 0$ and any $b' > b \ge 1$,
$$|I(y, b') - I(y, b)| = \left| (N)\int_b^{b'} f(x,\, y)\, dx \right| \le (N)\int_b^{b'} cx^{-3}\, dx < cb^{-2}$$

(part 2 of Proposition **??**, Proposition **??**, and the assumption) and the integral

$$I(y) := (N)\int_0^{+\infty} f(x,\, y)\, dx = \lim_{b\to+\infty} I(y,\, b)$$

(Proposition **??**) exists by the Cauchy condition for limits of functions at $+\infty$. In the rest of the proof we mostly omit references to the applied properties of the $(N)\int$ from Section 2, the reader will easily identify them. It follows that $I\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ is continuous: for fixed $y, y' > 0$ with small enough $|y-y'|$, for bounded $x > 0$ the quantity $|f(x,y) - f(x,y')|$ is as small as we need by uniform continuity of f on compact sets, and for the remaining x the quantity $|f(x,y) - f(x,y')|$ goes rapidly to 0 as $x \to +\infty$ by the assumption. Thus $(N)\int_0^b I(y)$ exists for any $b > 0$ by Corollary **??**. For $y \geq 1$ we have the bound

$$|I(y)| \leq (N)\int_0^y cy^{-3}\, dx + (N)\int_y^{+\infty} cx^{-3}\, dx < 2cy^{-2}\ .$$

To show the existence of $(N)\int_0^{+\infty} I(y)$ we again check the Cauchy condition for $b \to +\infty$: if $b' > b \geq 1$ then

$$\left|(N)\int_b^{b'} I(y)\right| \leq (N)\int_b^{b'} 2cy^{-2} < 2cb^{-1} \to 0,\ b \to +\infty\ .$$

Thus the second iterated Newton integral exists. So does the first one, by the symmetric argument with exchanged x and y.

To prove the equality, we approximate the second iterated Newton integral A by the integral

$$A(b) := (N)\int_0^b \left((N)\int_0^b f(x,\, y)\, dx\right) dy,\ b \geq 1\ .$$

The tail of the inner integral in A is

$$|I(y) - I(b,y)| = \left|(N)\int_b^{+\infty} f(x,\, y)\, dx\right| \leq (N)\int_b^{+\infty} cx^{-3}\, dx < cb^{-2}\ .$$

Thus

$$\begin{aligned}
|A - A(b)| &= \left|(N)\int_0^b I(y) + (N)\int_b^{+\infty} I(y) - (N)\int_0^b I(b,\, y)\, dy\right| \\
&\leq \left|(N)\int_0^b (I(y) - I(b,\, y))\, dy\right| + \left|(N)\int_b^{+\infty} I(y)\, dy\right| \\
&\leq (N)\int_0^b cb^{-2}\, dy + (N)\int_b^{+\infty} 2cy^{-2}\, dy = 3cb^{-1}\ .
\end{aligned}$$

For the first iterated Newton integral B and

$$B(b) := (N)\int_0^b \left((N)\int_0^b f(x,\, y)\, dy\right) dx,\ b \geq 1\ ,$$

we get by the symmetric argument with exchanged x and y the same bound $|B - B(b)| \leq 3cb^{-1}$. By Theorem **??**, $B(b) = A(b)$ for every $b > 0$. Sending b to $+\infty$ we get $B = A$, the two iterated Newton integrals are equal. □

2.6 Aplikace integrálů

Abelův součtový vzorec. Dva důkazy Stirlingovy formule.

Pro posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ zavedeme funkci

$$A = A(x)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ A(x) = \sum_{n \leq x} a_n \ ,$$

jíž se někdy říká *sumatorní (součtová) funkce* posloupnosti (a_n). Podle definice má na intervalu $[0, 1)$ konstantní hodnotu 0, na intervalu $[1, 2)$ konstantní hodnotu a_1, na intervalu $[2, 3)$ konstantní hodnotu $a_1 + a_2$, a tak dál.

Věta 2.6.1 (Abelův součtový vzorec). *Nechť $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Pak pro každé reálné $x \geq 0$ platí rovnost*

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - (R)\int_0^x A(t)f'(t) = A(x)f(x) - \int_0^x A(t)f'(t) \ .$$

Důkaz. Podle předpokladů je integrand $A(t)f'(t)$ funkce, jež je na intervalu $[0, x]$ omezená a nespojitá nejvýše v celých číslech. Její Riemannův integrál existuje podle věty **??**. Rovnost dokážeme aditivním rozkladem integrálu podle tvrzení **??**. Nechť $m = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0$. Pak

$$\begin{aligned} A(x)f(x) - \int_0^x A(t)f'(t) &= A(x)f(x) - \int_m^x A(t)f'(t) - \sum_{n=0}^{m-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t) \\ &= A(x)f(x) - A(m)(f(x) - f(m)) - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{m-1} A(n)(f(n+1) - f(n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m} (A(n) - A(n-1))f(n) = \sum_{n \leq x} a_n f(n) \ . \end{aligned}$$

V prvním kroku jsme použili tvrzení **??**. Ve druhém konstantnost $A(t)$ na intervalech $[m, x]$ a $[n, n+1)$, tvrzení **??** a větu **??**. Třetí je založený na vlastnostech sčítání a násobení. □

Věta 2.6.2 (Stirlingova formule). *Pro $n \in \mathbb{N}$ a jdoucí do ∞ máme asymptotiku*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = (1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n , \quad \textit{to jest} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 ,$$

přičemž $\pi = 3.14159\ldots$ a $e = 2.71828\ldots$ jsou všeobecně známé konstanty.

S výraznou pomocí integrálů větu dvěma způsoby dokážeme.

První důkaz využívá následující vyjádření faktoriálu integrálem.

Tvrzení 2.6.3 (1. vyjádření $n!$ integrálem). *Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro (všechna) $n \in \mathbb{N}$ je*

$$\log(n!) = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x + c + O(1/n) .$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \log x = \log m + O(m^{-2}) .$$

Nechť $m \geq 2$. Integrál se rovná

$$\begin{aligned}
\left[x \log x - x\right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} &= (m+1/2)\log(m+1/2) - (m+1/2) - \\
&\quad - (m-1/2)\log(m-1/2) + (m-1/2) \\
&= m \log\left(\frac{m+1/2}{m-1/2}\right) + (1/2)\log(m^2 - 1/4) - 1 \\
&= \log m + m \log\left(1 + \left(m - \tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(1 - \tfrac{1}{4m^2}\right) - 1 .
\end{aligned}$$

Poslední tři sčítance dohromady skutečně dávají, díky rozvoji $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ pro $|x| \leq \frac{2}{3}$ (viz Taylorovy řady v *MA I* [5]),

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{m-1/2} - \frac{m}{2(m-1/2)^2} + O(m^{-2}) + O(m^{-2}) - 1 \\
&= \frac{2m(m-1/2) - m - 2(m-1/2)^2}{2(m-1/2)^2} + O(m^{-2}) \\
&= \frac{-1/2}{2(m-1/2)^2} + O(m^{-2}) = O(m^{-2}) .
\end{aligned}$$

Díky linearitě integrálu vzhledem k integračním mezím

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{m=1}^{n} \log m = \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \log x + O(m^{-2}) \right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x + \sum_{m=1}^{n} O(m^{-2}) .
\end{aligned}$$

A jsme hotovi, podle úlohy 2.6.4

$$\sum_{m=1}^{n} O(m^{-2}) = \sum_{m=1}^{\infty} O(m^{-2}) - \sum_{m=n+1}^{\infty} O(m^{-2}) = c + O(1/n)$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Úloha 2.6.4. *Ověřte, že řada* $\sum_{m=1}^{\infty} O(m^{-2})$ *konveguje a že její* n*-tý zbytek je řádu* $O(1/n)$.

Tedy, opět díky rozvoji $\log(1+x) = x + O(x^2)$ pro $|x| \le \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x + c + O(1/n) = \big[x \log x - x\big]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + c + O(1/n) \\
&= (n+1/2)\log(n+1/2) - n + c_0 + O(1/n) \\
&= (n+1/2)(\log n + \log(1+1/2n)) - n + c_0 + O(1/n) \\
&= (n+1/2)\log n - n + 1/2 + O(1/n) + O(1/n) + c_0 + O(1/n) \\
&= (n+1/2)\log n - n + c_1 + O(1/n)\ ,
\end{aligned}$$

kde jsme cestou v c_i posbírali různé konstantní příspěvky. Odlogaritmování s pomocí úlohy 2.6.5 dává

$$n! = \exp(\log(n!)) = \frac{n^{n+1/2}}{e^n} e^{c_1} e^{O(1/n)} = (1 + O(1/n))\, c_2 \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\ ,$$

kde $c_2 = e^{c_1} > 0$ (protože exponenciála má jen kladné hodnoty).

Úloha 2.6.5. *Dokažte, že pro* $|\Delta| \le 1$ *je* $e^{\Delta} = 1 + O(\Delta)$.

Věta 2.6.2 tak už je napůl dokázaná, zbývá ovšem odvodit rovnost

$$c_2 = \sqrt{2\pi}\ .$$

Zbývající druhá polovina prvního důkazu je možná ještě zajímavější než první, neboť v ní integrály vystupují celkem překvapivým způsobem.

Tvrzení 2.6.6 (Wallisův $\int$). *Pro* $n \in \mathbb{N}_0$ *označíme*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \ (>0)\ .$$

Pak $W_0 = \pi/2$, $W_1 = 1$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \ \ \textit{pro } n \ge 2 \ \textit{ a } \ \lim_{n\to\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} = 1\ .$$

Důkaz. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \pi/2$, $W_1 = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1$, W_2 jsme víceméně spočítali v příkladu 1.1.23 a pro $n \geq 2$ za pomoci integrace per partes a rovnosti $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ spočítáme

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)'(\cos x)^{n-1} = \left[(\sin x)(\cos x)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + \\ &\quad + (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2(\cos x)^{n-2} \\ &= 0 - 0 + (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$

a máme uvedenou rekurenci. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in [0, \pi/2]$ patrně $0 \leq \cos^n x \leq \cos^{n-1} x$, přičemž pro $x \neq 0, \pi/2$ platí dokonce ostré nerovnosti. Tedy $W_n < W_{n-1} < W_{n-2}$ a pro $n \to \infty$

$$1 < \frac{W_{n-1}}{W_n} < \frac{W_{n-2}}{W_n} = \frac{n}{n-1} \to 1, \text{ a proto i } \frac{W_{n-1}}{W_n} \to 1\ .$$

□

Rekurenci pro W_n snadno vyřešíme a pro $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2} W_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

a

$$W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} W_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\ .$$

Pro $n \to \infty$ využijeme limitu v posledním tvrzení a již dokázanou asymptotiku $n! \sim c_2\sqrt{n}(n/e)^n$ a spočítáme

$$\begin{aligned} 1 &\sim \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \frac{(2n+1)(2n)!^2}{(2^n n!)^4} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\sim \frac{2n \cdot c_2^2 \cdot 2n \cdot (2n/e)^{4n}}{2^{4n} \cdot c_2^4 \cdot n^2 \cdot (n/e)^{4n}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{c_2^2}\ . \end{aligned}$$

Odtud $c_2 = \sqrt{2\pi}$ a první důkaz věty 2.6.2 je dokončen. □

Pro druhý důkaz věty 2.6.2 použijeme jiné vyjádření faktoriálu integrálem. Další dvě taková vyjádření jsou uvedena v poznámkách v oddílu 2.9.

Tvrzení 2.6.7 (2. vyjádření $n!$ integrálem). *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se*

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\ .$$

Důkaz. Uvedený integrál označíme jako I_n. Pak $I_0 = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$ a pro $n > 0$ spočítáme per partes (tvrzení **??**)

$$I_n = \int_0^{+\infty} (-e^{-x})' x^n = [-e^{-x}x^n]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1} = 0 - 0 + nI_{n-1} \ .$$

Indukce dává $I_n = n!$. □

Maximum integrandu je v $x = n$. Substitucí $x = n(1+y)$ ho posuneme do $y = 0$ a pro $n!$ tak dostaneme ještě lepší integrální vyjádření

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx = e^{-n}n^{n+1}\int_{-1}^{+\infty} \big(e^{-y}(1+y)\big)^n\,dy \ .$$

Lehce se vidí (úloha 2.6.8), že nezáporná funkce $e^{-y}(1+y)$ na $[-1,0]$ roste z 0 do 1 a na $[0,+\infty)$ klesá z 1 do 0^+. Asymptotiku tohoto integrálu pro $n \to \infty$ najdeme rozkladem integračního intervalu na dva okraje a prostředek $[-\delta,\delta]$, přičemž $\delta > 0$ a vhodně jde k 0 s $n \to \infty$, a dále pomocí rozvoje

$$\begin{aligned} e^{-y}(1+y) &= e^{-y+\log(1+y)} = e^{-y^2/2+y^3/3-y^4/4+\dots} = e^{-y^2/2}e^{y^3/3-y^4/4+\dots} \\ &= e^{-y^2/2}\big(1+O(y^3)\big)\ ,\ |y| \le 1/2 \end{aligned}$$

(viz úloha 2.6.5).

Úloha 2.6.8. *Ověřte uvedené intervaly monotonie funkce* $e^{-y}(1+y)$.

Tvrzení 2.6.9 (Laplaceova metoda). *Nechť* $\delta\colon \mathbb{N} \to (0,1)$ *je posloupnost jdoucí k* 0 *s* $n \to \infty$ *alespoň tak rychle, že* $n\delta^3 = n\delta(n)^3 \to 0$. *Nechť dále*

$$J_1 = \int_{-1}^{-\delta} \big(e^{-y}(1+y)\big)^n,\ J_2 = \int_{\delta}^{+\infty} \big(e^{-y}(1+y)\big)^n,\ J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ny^2/2}$$

a

$$J_4 = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-ny^2/2} \ .$$

Potom pro $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\int_{-1}^{+\infty} \big(e^{-y}(1+y)\big)^n = \big(1+O(n\delta^3)\big)(J_3 - 2J_4) + J_1 + J_2 \ .$$

Důkaz. Rozkladu $[-1,+\infty) = [-1,-\delta] \cup [\delta,+\infty) \cup [-\delta,\delta]$ odpovídají sčítance J_1, J_2 a sčítanec

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \big(e^{-y}(1+y)\big)^n &= \int_{-\delta}^{\delta} e^{-ny^2/2}\big(1+O(y^3)\big)^n \\ &= \big(1+O(n\delta^3)\big)\int_{-\delta}^{\delta} e^{-ny^2/2} \text{ (úloha 2.6.10)} \\ &= \big(1+O(n\delta^3)\big)(J_3 - 2J_4) \ . \end{aligned}$$

□

Úloha 2.6.10. *Proč platí, že*

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-ny^2/2}\left(1+O(y^3)\right)^n\,dy = \left(1+O(n\delta^3)\right)\int_{-\delta}^{\delta} e^{-ny^2/2}\,dy\ ?$$

2.7 Henstockův–Kurzweilův integrál

2.8 Lebesgueův integrál

2.9 Poznámky a další úlohy

Oddíl 2.3. Tento oddíl jsem sepsal podle 11. kapitoly knihy [22] V. A. Zoricha.

Kapitola 3

Diferenciální počet funkcí více proměnných

Cílem této kapitoly je zobecnit nutnou podmínku pro nabývání extrému funkcemi jedné reálné proměnné na funkce několika reálných proměnných. Oddíl 3.1 zobecňuje operaci derivace a v navazujícím oddílu 3.2 uvedeme a dokážeme nutné podmínky pro to, aby funkce více proměnných měla v daném bodě lokální extrém.

3.1 Diferenciál a parciální derivace

$\mathbb{R}^m$ jako vektorový prostor se skalárním součinem, normou a vzdáleností. Koule a otevřené množiny.

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nejprve si zopakujeme, jaké struktury lineární algebry a topologie nese m-rozměrný *euklidovský prostor* $\mathbb{R}^m$, složený ze všech uspořádaných m-tic $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ reálných čísel x_i. Předně jde o *m-rozměrný vektorový prostor nad tělesem skalárů* $\mathbb{R}$. Podrobněji to znamená následující.

1. Vzhledem k binární operaci $x + y$ *sčítání vektorů,*

   $$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m) + (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_m + y_m)$$

   — první + definujeme, ta další označují dané sčítání v $\mathbb{R}$, tvoří $(\mathbb{R}^m, +)$ komutativní grupu (úloha 3.1.1).

2. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}^m$ dána unární operace αx *skalárního násobení (vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$)*

   $$\alpha x = \alpha(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m) = (\alpha x_1,\, \alpha x_2,\, \ldots,\, \alpha x_m)\;.$$

   Tyto operace splňují pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x, y \in \mathbb{R}^m$ požadavky (úloha 3.1.2)

(a) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

(b) $1x = x$,

(c) $\alpha(x + y) = (\alpha x) + (\beta x) = \alpha x + \beta x$ a

(d) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Úloha 3.1.1. *Dokažte, že* $(\mathbb{R}^m, +)$ *je komutativní grupa.*

Úloha 3.1.2. *Popište operace vyskytující se v požadavcích (a)–(d) a dokažte tyto rovnice.*

Úloha 3.1.3. *Dokažte další dvě vlastnosti skalárního násobení:*

$$(-1)x = -x \ \ a \ \ 0x = \overline{0} \,.$$

Zde $-1, 0 \in \mathbb{R}$, $-x$ *je aditivní inverz prvku* x *v grupě* $(\mathbb{R}^m, +)$ *a* $\overline{0}$ *je neutrální prvek grupy* $(\mathbb{R}^m, +)$. *Uveďte vždy dva důkazy: jeden z definice konkrétního skalární násobení na* $\mathbb{R}^m$ *výše a druhý odvozením z požadavků (a)–(d).*

Důležitou funkci dvou proměnných definovanou na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^m$ představuje *skalární součin vektorů*

$$\langle\cdot,\, \cdot\rangle \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \langle x,\, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m \,.$$

Ten má pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ tyto vlastnosti:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ a rovnost nastává právě a jen pro $x = \overline{0}$,
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ a
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Úloha 3.1.4. *Dokažte tyto tři vlastnosti skalárního součinu vektorů v* $\mathbb{R}^m$.

Skalárním součinem měříme úhel mezi vektory v $\mathbb{R}^m$, ale také pomocí něj měříme jejich velikosti a vzdálenosti mezi nimi. Definujeme *(euklidovskou) normu* jako zobrazení

$$\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2} \,.$$

Vlastnosti normy ($a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$):

1. $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \iff x = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$,
2. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ a
3. platí trojúhelníková nerovnost $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Úloha 3.1.5. *Dokažte tyto tři vlastnosti normy vektorů v* $\mathbb{R}^m$.

Z normy už lehce odvodíme *(euklidovskou) vzdálenost*

$$d\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

mezi dvěma body či vektory $x, y \in \mathbb{R}^m$:

$$d(x,\, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2}\;.$$

Vlastnosti vzdálenosti ($x, y, z \in \mathbb{R}^m$):

1. $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ a
3. platí trojúhelníková nerovnost $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Úloha 3.1.6. *Dokažte tyto tři vlastnosti vzdálenosti mezi body v* $\mathbb{R}^m$.

Zobecníme z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^m$ δ-okolí bodů a otevřené množiny (viz *MA I* [5]).

Definice 3.1.7 (koule, otevřená množina a okolí). *Pro* $s \in \mathbb{R}^m$ *a kladné* $r \in \mathbb{R}$ *(otevřenou) koulí (v* $\mathbb{R}^m$*, se středem* s *a poloměrem* r*) rozumíme množinu*

$$B(s,\, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(s,\, x) = \|x - s\| < r\}\;.$$

Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ *je otevřená, pokud pro každý její bod* $a \in M$ *existuje poloměr* $r > 0$*, že* $B(a, r) \subset M$*. Pro* $a \in \mathbb{R}^m$ *a* $U \subset \mathbb{R}^m$ *o množině* U *řekneme, že je okolím bodu* a*, když* $a \in U$ *a* U *je otevřená.*

Úloha 3.1.8. *Ověřte, že pro* $m = 1$ *je* $B(a, \delta) = U(a, \delta)$ *a že otevřené množiny v* $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ *jsou tytéž jako ty definované v* MA I *[5].*

Úloha 3.1.9. *Dokažte, že každá koule v* $\mathbb{R}^m$ *je otevřená množina.*

Úloha 3.1.10. *Dokažte, že otevřené množiny v* $\mathbb{R}^m$ *mají následující vlastnosti.*

1. *Množiny* $\emptyset$ *a* $\mathbb{R}^m$ *jsou otevřené.*
2. *Jsou-li* $A, B \subset \mathbb{R}^m$ *otevřené, je i průnik* $A \cap B$ *otevřená množina.*
3. *Je-li* $A_i \subset \mathbb{R}^m$*,* $i \in I$*, systém otevřených množin, je i sjednocení* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *otevřená množina.*

Budeme pracovat s funkcemi

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ f = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m)\;,$$

definovanými na podmnožinách $M \subset \mathbb{R}^m$, které budou většinou otevřené, nebo obecněji se zobrazeními

$$f\colon M \to \mathbb{R}^n,\ M \subset \mathbb{R}^m,\ f = (f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n)\;,$$

kde $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jsou *souřadnicové funkce*. Než začneme s derivacemi, zobecníme spojitost funkce z jedné na více proměnných.

Definice 3.1.11 (spojitost funkcí a zobrazení). *Je-li $U \subset \mathbb{R}^m$ okolí bodu a, nazveme funkci $f: U \to \mathbb{R}$ spojitou v a, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ .$$

Stejně se definuje spojitost zobrazení $f: U \to \mathbb{R}^n$, jen absolutní hodnota $|f(x) - f(a)|$ (což je norma v $\mathbb{R}^1$) se nahradí normou $\|f(x) - f(a)\|$ v $\mathbb{R}^n$. Funkci $f: U \to \mathbb{R}$ či zobrazení $f: U \to \mathbb{R}^n$ nazveme spojitými (na U), jsou-li spojité v každém bodu otevřené množiny U,

Definice 3.1.12 (směrová derivace). *Nechť $f: U \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a. Její směrovou derivací v a ve směru $v \in \mathbb{R}^m \backslash \{\overline{0}\}$ rozumíme limitu*

$$\mathrm{D}_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}\ ,$$

existuje-li.

Představme si U jako oblast v třírozměrném prostoru, v níž funkce f měří teplotu a kterou prolétává nějaká částice. Směrová derivace $\mathrm{D}_v f(a)$ pak udává okamžitou změnu teploty částice ve chvíli, kdy se nalézá v bodu a a má vektor rychlosti v.

Následuje důležitá definice parciální derivace funkce několika proměnných — celá fyzika je založena na rovnicích pro parciální derivace různých funkcí.

Definice 3.1.13 (parciální derivace). *Nechť $f: U \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a. Její parciální derivace v bodě a podle proměnné x_i je směrová derivace $\mathrm{D}_{e_i} f(a)$ pro i-tý vektor kanonické báze e_i, tedy $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ má na i-tém místě 1 a jinde nuly. Značí se jako*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ .$$

Explicitně napsáno,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1,\, \ldots,\, a_{i-1},\, a_i + h,\, a_{i+1},\, \ldots,\, a_m) - f(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m)}{h}\ .$$

Úloha 3.1.14. *Ověřte, že pro $m = 1$ a funkci $f = f(x_1)$ jedné proměnné je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f'(x_1)\ .$$

Definice 3.1.15 (gradient funkce). *Nechť $f: U \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a, která má v a parciální derivaci podle každé z m proměnných. Vektor jejich hodnot nazýváme gradientem funkce f v a. Značíme ho jako*

$$\nabla f(a) := \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),\, \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a),\, \ldots,\, \tfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)\ .$$

Zobecníme lineární aproximaci $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ funkce $f(x)$ jedné proměnné na zobrazení s n souřadnicovými funkcemi o m proměnných.

Definice 3.1.16 (diferenciál). *Nechť $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a. Řekneme, že f má v a diferenciál nebo že f je v a diferencovatelné, když existuje takové lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

— pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $h \in \mathbb{R}^m$ splňuje $a + h \in U$ a $0 < \|h\| < \delta$, pak $\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| < \varepsilon\|h\|$. Diferenciálem zobrazení f v a pak rozumíme lineární zobrazení L a jeho hodnotu ve vektoru $h \in \mathbb{R}^m$ pak značíme

$$\mathrm{D}f(a)(h) = L(h)\ .$$

Norma ve jmenovateli předchozího zlomku se bere v $\mathbb{R}^m$ a norma v čitateli v $\mathbb{R}^n$. Směrová a parciální derivace jsou pouhá čísla, kdežto diferenciál je objekt vyššího řádu, lineární zobrazení.

Úloha 3.1.17. *Co je diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}$ pro funkci jedné proměnné $f(x)$?*

Směrová derivace, parciální derivace a diferenciál funkce f v bodu a dávají lokální aproximace f poblíž a lineární funkcí:

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + \mathrm{D}_v f(a)\cdot t + o(t),\ t \to 0\ ,\\ f(a+te_i) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot t + o(t),\ t \to 0\ ,\\ f(a+h) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + o(\|h\|),\ \|h\| \to 0\ . \end{aligned}$$

V prvních dvou vztazích je t reálné číslo jdoucí k nule a aproximace platí pouze pro argumenty funkce na přímce jdoucí bodem a ve směru v, resp. ve směru i-té souřadnicové osy. Ve třetím vztahu h probíhá body $\mathbb{R}^m$ a aproximace platí pro všechny argumenty funkce v okolí bodu a. Diferencovatelnost funkce či zobrazení je silnější vlastnost než existence směrových nebo parciálních derivací, z nichž neplyne ani spojitost v daném bodě.

Příklad 3.1.18. *Uvažme funkci*

$$f = f(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definovanou jako $f(x,y) = 1$ pokud $xy = 0$ a $f(x,y) = 0$ jinde. Jak je to s jejími parciálními derivacemi a spojitostí v $\overline{0} = (0,0)$?

Protože má f libovolně blízko u počátku hodnoty 0 i hodnoty 1, není tam spojitá. Má ale v počátku obě parciální derivace, podle x i podle y, a obě rovné 0. Funkce je totiž na souřadnicových osách konstantně rovná 1. □

Příklad 3.1.19. *Spočítejme parciální derivace funkce*

$$f = f(x,\, y,\, z) = x^3 y \sin(yz) + x \log z \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ .$$

Proměnné různé od té, podle které parciálně derivujeme, bereme jako konstanty. Vystačíme proto s pravidly a postupy pro derivování funkcí jediné proměnné. Pro naši funkci tak máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 y \sin(yz) + \log z\ ,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^3(\sin(yz) + zy\cos(yz)) \ \text{ a}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= x^3 y^2 \cos(yz) + x/z\ .
\end{aligned}$$

□

Úloha 3.1.20. *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 3.1.21 (vlastnosti diferenciálu). *Nechť*

$$f = (f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n) \colon U \to \mathbb{R}^n$$

je zobrazení definované na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a. Pak platí následující.

1. *Když diferenciál zobrazení f v a existuje, je určený jednoznačně.*
2. *Zobrazení f je diferencovatelné v a, právě když jeho každá souřadnicová funkce f_i je diferencovatelná v a.*
3. *Když je zobrazení f diferencovatelné v a, potom je f v a spojité.*

Tvrzení 3.1.22 (diferenciál ⇒ ∂). *Když je funkce $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a, diferencovatelná v a, pak má v a všechny parciální derivace a jejich hodnoty diferenciál určují:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}f(a)(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\cdot h_m\\
&= \langle \nabla f(a),\, h\rangle
\end{aligned}$$

— hodnota diferenciálu funkce f v h se dostane jako skalární součin vektorů h a gradientu f v a. Funkce f pak má v a též všechny směrové derivace a platí vztah

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{D}f(a)(v)\ .$$

Důkaz. Z linearity diferenciálu $L = \mathrm{D}f(a)$ máme

$$L(h) = L(h_1e_1 + h_2e_2 + \cdots + h_me_m) = L(e_1)h_1 + \cdots + L(e_m)h_m\ ,$$

kde e_i je i-tý vektor kanonické báze. Díky aproximaci $f(a+te_i) = f(a)+L(te_i)+o(\|te_i\|)$ pro $t \to 0$, plynoucí z diferencovatelnosti f v a, máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{L(te_i)+o(\|te_i\|)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tL(e_i)+o(|t|)}{t} = L(e_i) + \lim_{t\to 0} \frac{o(|t|)}{t} \\ &= L(e_i)\ ,\end{aligned}$$

a tak $L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. To dává vyjádření diferenciálu parciálními derivacemi.

Nechť $v \in \mathbb{R}^m$ je nenulový vektor. Opět

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_v f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{L(tv)+o(\|tv\|)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tL(v)+o(|t|\cdot\|v\|)}{t} = L(v) + \lim_{t\to 0} \frac{o(|t|\cdot\|v\|)}{t} \\ &= L(v) = \mathrm{D}f(a)(v)\ .\end{aligned}$$

□

Jak známo, dané lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je popsáno maticí rozměru $n \times m$ a hodnota $L(h)$ se dostane maticovým násobením:

$$L(h) = \begin{pmatrix} L(h)_1 \\ L(h)_2 \\ \vdots \\ L(h)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,m} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

pro nějaké koeficienty $l_{i,j} \in \mathbb{R}$. Je-li L diferenciál f v a, má podle tvrzení 3.1.22 tato matice v i-tém řádku gradient souřadnicové funkce f_i v bodě a:

$$l_{i,\,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\ .$$

Důsledek 3.1.23 (Jacobiho matice). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a, na němž je definované zobrazení*

$$f\colon U \to \mathbb{R}^n\ ,$$

které je diferencovatelné v a. Diferenciál zobrazení f v a, kde f má souřadnicové funkce $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, je pak dán takzvanou Jacobiho maticí zobrazení f v bodě a:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Je-li Jacobiho matice čtvercová, její determinant se nazývá *jakobián.*

Věta 3.1.24 ($\partial \Rightarrow$ diferenciál). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. Má-li funkce $f\colon U \to \mathbb{R}$ na U všechny parciální derivace a ty jsou v bodě a spojité, pak je f v bodě a diferencovatelná.*

Důkaz. Omezíme se na případ $m = 2$ dvou proměnných x, y a bod $a = \overline{0} = (0,0)$, pro více proměnných se postupuje podobně (úloha 3.1.25). Rovněž můžeme předpokládat, že $U \subset \mathbb{R}^2$ je koule (tedy otevřený kruh) se středem v počátku. Nechť $h = (h_1, h_2) \in U$ a $h' = (h_1, 0)$. Přírůstek $f(h) - f(\overline{0})$ napíšeme pomocí přírůstků ve směrech obou souřadnicových os:

$$f(h) - f(\overline{0}) = (f(h) - f(h')) + (f(h') - f(\overline{0}))\ .$$

Úsečky $h'h$ a $\overline{0}h'$ obě leží v U, funkce f je na nich definovaná a na první úsečce závisí pouze na proměnné y a na druhé jen na x. Pro obě úsečky a funkci f použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (pro funkce jedné proměnné), viz *MA I* [5]:

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) \cdot h_1\ ,$$

kde ζ_2 (resp. ζ_1) je nějaký vnitřní bod úsečky $h'h$ (resp. $\overline{0}h'$). Body ζ_1 a ζ_2 leží v kouli $B(\overline{0}, \|h\|)$. Díky spojitosti obou parciálních derivací v počátku máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{0}) + \alpha(\zeta_2) \ \text{ a } \ \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{0}) + \beta(\zeta_1)\ ,$$

kde $\alpha(h)$ i $\beta(h)$ je $o(1)$ pro $h \to \overline{0}$ (tj. pro každé $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $\|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ a totéž pro $\beta(h)$). Tedy

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{0}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{0}) \cdot h_1 + \alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1\ .$$

Z trojúhelníkové nerovnosti a nerovností $0 < \|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \|h\|$ a $|h_1|, |h_2| \le \|h\|$ plyne, že když $\|h\| < \delta$, tak

$$|\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1| \le |\alpha(\zeta_2)| \cdot \|h\| + |\beta(\zeta_1)| \cdot \|h\| \le 2\varepsilon\|h\|\ .$$

Tedy $\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1 = o(\|h\|)$ pro $h \to \overline{0}$. Podle definice diferenciálu je funkce f diferencovatelná v počátku. □

Úloha 3.1.25. *Rozmyslete si, jak se předchozí věta dokáže pro obecnou funkci s více než dvěma proměnnými.*

Zobecníme Lagrangeovu větu o střední hodnotě na funkce více proměnných.

Tvrzení 3.1.26 (Lagrange pro funkce více proměnných). *Nechť $u = ab$ je úsečka s koncovými body $a \neq b$, jež leží v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^m$, a*

$$f\colon U \to \mathbb{R}$$

je funkce, jež je spojitá v každém bodě u a má v každém vnitřním bodě u diferenciál. Pak pro nějaký vnitřní bod ζ úsečky u platí, že

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(\zeta)(b-a)$$

— rozdíl hodnot funkce f na koncích úsečky u se rovná hodnotě diferenciálu funkce f pro nějaký vnitřní bod ζ úsečky u na směrovém vektoru úsečky u.

Důkaz. Uvážíme funkci

$$F(t) = f(a + t(b-a))\colon [0,\, 1] \to \mathbb{R}\ .$$

Ta je patrně spojitá na $[0,1]$ a její derivace v bodě $t \in (0,1)$ je

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a + (t+h)(b-a)) - f(a + t(b-a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{D}f(a + t(b-a))(h(b-a)) + o(\|h(b-a)\|)}{h} \\
&= \mathrm{D}f(a + t(b-a))(b-a)\ .
\end{aligned}$$

Klasická Lagrangeova věta o střední hodnotě pak pro $F(t)$ a interval $[0,1]$ přesně dává se $\zeta = a + t(b-a)$, $0 < t < 1$, co se tvrdí. □

Řekneme, že dva (různé) body $a, b \in M \subset \mathbb{R}^m$ *lze spojit v M lomenou čarou*, existuje-li taková posloupnost úseček $s_1, s_2, \ldots, s_n \subset M$, že a je konec s_1, b je konec s_n, a leží pouze v úsečce s_1, b pouze v s_n a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$ je $s_i \cap s_{i+1}$ společný konec obou úseček.

Úloha 3.1.27. *Dokažte, že $a, b \in M$ lze spojit v M lomenou čarou, právě když existuje (spojité) po částech lineární zobrazení $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, jehož obraz je obsažený v M, $f(0) = a$ a $f(1) = b$.*

Úloha 3.1.28. *Ukažte, že když přidáme požadavek, aby $s_i \cap s_j = \emptyset$ pro každé $1 \le i, j \le n$ s $|i-j| \ge 2$, dostaneme ekvivalentní definici spojování bodů lomenou čarou v rámci možiny.*

Definice 3.1.29 (souvislost otevřených množin). *Otevřenou množinu*

$$M \subset \mathbb{R}^m$$

nazveme souvislou, když lze každé dva body v M spojit v M lomenou čarou. Tato definice se týká jen otevřených množin, pro obecnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ se souvislost definuje jinak.

Úloha 3.1.30. *Dokažte, že každá koule v $\mathbb{R}^m$ je souvislá množina, stejně jako $\mathbb{R}^m \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_k)$, kde ℓ_i jsou přímky. Dokažte, že množina $B \setminus R$, kde $B \subset \mathbb{R}^3$ je koule a R je rovina ji protínající, není souvislá.*

Důsledek 3.1.31 ($\partial = 0 \Rightarrow f \equiv \text{const}$). *Má-li funkce m proměnných*

$$f\colon U \to \mathbb{R}$$

v každém bodě otevřené a souvislé množiny $U \subset \mathbb{R}^m$ nulový diferenciál, je na U konstantní. Totéž platí, má-li f v každém bodě U každou parciální derivaci nulovou.

Důkaz. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená a souvislá množina a funkce $f\colon U \to \mathbb{R}$ má na U nulový diferenciál. Vezmeme dva libovolné body $a, b \in U$ a spojíme je lomenou čarou pomocí úseček $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ležících v U. Pro každou z nich $s_i = a_i b_i$ máme podle předchozího tvrzení a předpokladu o f, že

$$f(a_i) - f(b_i) = \mathrm{D}f(\zeta)(a_i - b_i) = 0 \ \text{ a } \ f(a_i) = f(b_i)$$

(ζ je nějaký vnitřní bod s_i). Hodnoty funkce f na koncích všech úseček s_i se rovnají a tedy $f(a) = f(b)$.

Má-li funkce f v každém bodě U nulovou každou parciální derivaci, je f podle věty 3.1.24 v každém bodě U diferencovatelná a (podle vyjádření diferenciálu pomocí parciálních derivací) její diferenciál je vždy nulový, čímž jsme v předchozí situaci. □

Podíváme se na aritmetiku parciálnich derivací a diferenciálů.

Úloha 3.1.32. *Dokažte následující aritmetické vzorce pro parciální derivace.*

Tvrzení 3.1.33. *Nechť jsou funkce*

$$f = f(x_1, \ldots, x_m),\ g = g(x_1, \ldots, x_m)\colon U \to \mathbb{R}$$

definované na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu $a \in U$ a mají v bodě a parciální derivaci podle proměnné x_i. Pak ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ píšeme stručněji $\partial_i f$)

$$\begin{aligned}
\partial_i(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha\partial_i f(a) + \beta\partial_i g(a)\\
\partial_i(fg)(a) &= g(a)\partial_i f(a) + f(a)\partial_i g(a)\\
\partial_i(f/g)(a) &= \frac{g(a)\partial_i f(a) - f(a)\partial_i g(a)}{g(a)^2} \quad (\textit{pokud } g(a) \neq 0)\ .
\end{aligned}$$

Tvrzení 3.1.34 (počítání s diferenciály). *Uvažme bod a jeho okolí, $\mathbb{R}^m \supset U \ni a$, a funkce $f, g\colon U \to \mathbb{R}$, obě diferencovatelné v a.*

1. *Když $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak i funkce $\alpha f + \beta g$ je v a diferencovatelná a*

$$\mathrm{D}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha\mathrm{D}f(a) + \beta\mathrm{D}g(a)\ .$$

2. *Součinová funkce fg je též diferencovatelná v a a*

$$\mathrm{D}(fg)(a) = g(a)\mathrm{D}f(a) + f(a)\mathrm{D}g(a)\ .$$

3. Když $g(a) \neq 0$, je i podílová funkce f/g diferencovatelná v a a

$$\mathrm{D}(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\mathrm{D}f(a) - f(a)\mathrm{D}g(a)\Big) \ .$$

Všimněme si, že výsledný diferenciál je vždy lineární kombinace diferenciálů funkcí f a g.

Důkaz. Tyto vzorce plynou z tvrzení 3.1.33 a 3.1.22 a z věty 3.1.24. □

Úloha 3.1.35. *Dokažte, že vzorec pro diferenciál lineární kombinace v části 1 platí obecněji i pro zobrazení $f, g: U \to \mathbb{R}^n$.*

Zobecníme vzorec pro derivaci složené funkce pro složené zobrazení. V následující větě zapisujeme skládání funkcí a zobrazení v pořadí zprava doleva podle pořadí aplikace: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Věta 3.1.36 (diferenciál složeného zobrazení). *Nechť*

$$f\colon U \to V, \ g\colon V \to \mathbb{R}^k$$

jsou dvě zobrazení, definovaná na okolích $a \in U \subset \mathbb{R}^m$ a $b = f(a) \in V \subset \mathbb{R}^n$. Je-li f diferencovatelné v a a g diferencovatelné v b, je složené zobrazení

$$g \circ f = g(f)\colon U \to \mathbb{R}^k$$

diferencovatelné v a a jeho diferenciál se rovná složenině diferenciálů zobrazení f a g:

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a) \ .$$

Než se pustíme do důkazu, připomeneme význam symbolů $o(h)$ a $O(h)$ a v lemmatu uvedeme jejich jednoduché vlastnosti, které v důkazu využijeme.

Pro zobrazení $z\colon U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí počátku $\overline{0}$, budeme pro $x \to \overline{0}$ psát stručně $z(x) = o(x)$ místo $\|z(x)\| = o(\|x\|)$ a $z(x) = O(x)$ místo $\|z(x)\| = O(\|x\|)$. Připomeňme si, že značení $z(x) = o(x)$ je zkratka pro

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0: \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \le \varepsilon\|x\|$$

(speciálně $z(\overline{0}) = \overline{0}$) a $z(x) = O(x)$ je zkratka pro

$$\exists\, c > 0 \ \exists\, \delta > 0: \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \le c\|x\|$$

(speciálně $z(\overline{0}) = \overline{0}$).

Lemma 3.1.37. *Nechť*

$$z_1, \, z_2\colon U \to \mathbb{R}^n, \ u\colon U \to V \ \text{ a } \ v\colon V \to \mathbb{R}^k$$

jsou zobrazení, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ jsou okolí počátků souřadnic. V následujících tvrzeních $x \to \overline{0}$.

1. Když je z_1 lineární zobrazení, potom $z_1(x) = O(x)$.

2. Když $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = o(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = o(x)$.

3. Když $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = O(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = O(x)$.

4. Pokud $u(x) = o(x)$ a $v = O(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.

5. Pokud $u(x) = O(x)$ a $v(x) = o(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.

Důkaz. Čtenářka si důkazy může rozmyslet jako cvičení, ale my je taky uvedeme.

1. Nechť je z_1 dané maticí $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $c = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ je

$$\|z_1(x)\| \le n \max_{1\le i\le n} |z_1(x)_i| \le mnc \max_{1\le i\le m} |x_i| \le mnc\|x\| \ .$$

2. Pokud pro dané $\varepsilon > 0$ je $\|z_1(x)\| \le \varepsilon\|x\|$ i $\|z_2(x)\| \le \varepsilon\|x\|$ na nějaké kouli $B(\overline{0}, r)$ v $\mathbb{R}^m$, pak podle trojúhelníkové nerovnosti na ní je i

$$\|z_1(x) + z_2(x)\| \le \|z_1(x)\| + \|z_2(x)\| \le 2\varepsilon\|x\| \ .$$

3. Pokud $\|z_1(x)\| \le \varepsilon\|x\|$ a $\|z_2(x)\| \le c\|x\|$, kde $\varepsilon, c > 0$ jsou konstanty, na nějaké kouli $B(\overline{0}, r)$ v $\mathbb{R}^m$, pak podle trojúhelníkové nerovnosti na ní je i

$$\|z_1(x) + z_2(x)\| \le \|z_1(x)\| + \|z_2(x)\| \le (\varepsilon + c)\|x\| \ .$$

4. Nechť $\|v(x)\| \le c\|x\|$, s konstantou $c > 0$, na nějaké kouli $B(\overline{0}, r)$ v $\mathbb{R}^n$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme tak malé $\delta > 0$, že $\varepsilon\delta/c \le r$ a na $B(\overline{0}, \delta)$ v $\mathbb{R}^m$ je $\|u(x)\| \le (\varepsilon/c)\|x\|$. Na této kouli pak máme

$$\|v(u(x))\| \le c\|u(x)\| \le c(\varepsilon/c)\|x\| = \varepsilon\|x\| \ .$$

5. Nechť $\|u(x)\| \le c\|x\|$, s konstantou $c > 0$, na nějaké kouli $B(\overline{0}, r)$ v $\mathbb{R}^m$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme tak malé $\delta > 0$, že $\delta \le r$ a na $B(\overline{0}, c\delta)$ v $\mathbb{R}^n$ je $\|v(x)\| \le (\varepsilon/c)\|x\|$. Na $B(\overline{0}, \delta)$ v $\mathbb{R}^m$ pak máme

$$\|v(u(x))\| \le (\varepsilon/c)\|u(x)\| \le (\varepsilon/c)c\|x\| = \varepsilon\|x\| \ .$$

□

Důkaz věty 3.1.36. V okolí počátků souřadnic máme podle předpokladu diferencovatelnosti aproximace

$$g(b + h) = g(b) + \mathrm{D}g(b)(h) + \gamma(h) \ \text{ a } \ f(a + h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h) \ ,$$

kde $\gamma(h) = o(h)$ v $\mathbb{R}^n$ a $\beta(h) = o(h)$ v $\mathbb{R}^m$. Označíme si $f(a+h) = f(a)+\Delta(h) = b + \Delta(h)$ s $\Delta(h) = \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)$. Pak

$$\begin{array}{rcl}
(g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a) & = & g(f(a + h)) - g(f(a)) \\
(\text{diferencovatelnost } f \text{ v } a) & = & g(b + \Delta(h)) - g(b) \\
(\text{diferencovatelnost } g \text{ v } b) & = & \mathrm{D}g(b)(\Delta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
(\text{linearita } \mathrm{D}g) & = & \mathrm{D}g(b)(\mathrm{D}f(a)(h)) + \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
 & = & (\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a))(h) + \alpha(h) \ ,
\end{array}$$

kde

$$\alpha(h) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h))\ .$$

Zbývá ukázat, že pro $h \to \overline{0}$ je $\alpha(h) = o(h)$. První sčítanec ve vyjádření $\alpha(h)$ je $o(h)$ podle částí 1 a 4 lemmatu (lineární, tedy O, zobrazení složené s o dává o) a druhý je rovněž $o(h)$ podle částí 1, 3 a 5 (o zobrazení složené se součtem O a o je o složené s O a tedy o). Celkem $\alpha(h) = o(h)$ podle části 2. Takže $g \circ f$ má v a diferenciál rovný lineárnímu zobrazení $\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a)$. $\square$

Za situace popsané v předchozí větě je Jacobiho matice složeného zobrazení $h = g \circ f$ v bodě a rovna součinu Jacobiho matice zobrazení g v bodě $b = f(a)$ a Jacobiho matice zobrazení f v bodě a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m} &= \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(b)\right)_{i,j=1}^{k,n} \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_r}(b) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m} . \end{aligned}$$

Speciálně pro $k = 1$, kdy funkce $h = h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ o m proměnných je složeninou

$$h = g(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n)$$

funkce $g = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n proměnných s n funkcemi $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dostáváme *řetízkové pravidlo* pro parciální derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \\ &= \langle \nabla g(f(a)), \partial_i f(a) \rangle\ , \end{aligned}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $\partial_i f = (\partial_i f_1, \partial_i f_2, \ldots, \partial_i f_n)$.

Příklad 3.1.38 (Einsteinova sumační konvence). *Ve fyzikálních textech je možné se často setkat se zjednodušeným značení součtů, které zavedl A. Einstein v r. 1916. Pokud se indexová proměnná objevuje v nějakém členu dvakrát a není jinak definovaná či omezená, implikuje sčítání podle všech svých hodnot.*

Například řetízkové pravidlo se pak napíše stručněji jako

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\ ,$$

protože index j se opakuje. $\square$

Zobecníme pojem tečny ke grafu funkce jedné proměnné na (nad)rovinu tečnou ke grafu funkce více proměnných. Pro jednoduchost značení se omezíme jen na případ funkce dvou proměnných a tečné roviny.

Tvrzení 3.1.39 (existence tečné roviny). *Předpokládejme, že $U \subset \mathbb{R}^2$ je okolí bodu (x_0, y_0) a že funkce*

$$f\colon U \to \mathbb{R}$$

je v bodě (x_0, y_0) diferencovatelná. Potom mezi všemi afinními funkcemi dvou proměnných $L(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$ splňujícími $L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ je právě jedna, jež pro $(x, y) \to (x_0, y_0)$ vyhovuje aproximaci

$$f(x,\, y) = L(x,\, y) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \,.$$

Je to afinní funkce

$$T(x,\, y) = f(x_0,\, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\cdot(y-y_0)\,.$$

Důkaz. Podle předpokladu pro $a = (x_0, y_0)$ a $h = (x - x_0, y - y_0) \to (0, 0)$ máme aproximaci $f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + o(h)$. Podle definice diferenciálu a tvrzení 3.1.22 má afinní funkce

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) \\ &= f(x_0,\, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)\cdot(y-y_0) \end{aligned}$$

požadovanou aproximační vlastnost. Nechť $L(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y = f(x_0, y_0) + r(x - x_0) + s(y - y_0)$ s $L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ je afinní funkce různá od $T(x, y)$. To znamená, že $r \neq \partial_x f(a)$ nebo $s \neq \partial_y f(a)$. Nechť nastává druhá možnost $s \neq \partial_y f(a)$, argument pro první je podobný. Pak pro $y \to y_0$ je

$$\begin{aligned} |f(x_0,\, y) - L(x_0,\, y)| &\geq |L(x_0,\, y) - T(x_0,\, y)| - |f(x_0,\, y) - T(x_0,\, y)| \\ &= |s - \partial_y f(a)|\cdot|y-y_0| + o(y-y_0) \\ &\neq o(y-y_0) \end{aligned}$$

— $L(x, y)$ neaproximuje $f(x, y)$ požadovaným způsobem. □

Definice 3.1.40 (tečná rovina). *V situaci předchozího tvrzení nazveme graf afinní funkce $T(x, y)$, množinu*

$$\{(x,\, y,\, T(x,\, y)) \mid (x,\, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

tečnou rovinou ke grafu

$$\{(x,\, y,\, f(x,\, y)) \mid (x,\, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

Nechť $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$, kde U je otevřená množina v rovině, a $f:\ U \to \mathbb{R}$ je funkce. Její graf

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

je plocha v třírozměrném euklidovském prostoru. Na G_f leží bod (x_0, y_0, z_0), kde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Nechť je funkce f v bodě (x_0, y_0) diferencovatelná. To plyne z existence a jednoznačnosti diferenciálu, protože zřejmě $T(x, y) = z_0 + \mathrm{D}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$. Graf funkce $T(x, y)$

$$G_T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = T(x, y)\}$$

se nazývá *tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě* (x_0, y_0, z_0).

Rovnici tečné roviny $z = T(x, y)$ přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) &= 0\,, \\ \text{neboli}\ \ \langle V, (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\rangle &= 0\,, \end{aligned}$$

kde $V \in \mathbb{R}^3$ je vektor

$$V = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

Označíme-li $X = (x, y, z)$ a $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, můžeme tečnou rovinu G_T zapsat i jako

$$G_T = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle V, X - X_0\rangle = 0\}\,.$$

Tvoří ji tedy právě ty body, jejichž směrové vektory k bodu X_0 jsou kolmé na V. Vektor V se nazývá *normálovým vektorem ke grafu funkce f v bodě X_0*.

Definice 3.1.41 (parciální derivace k-tého řádu). *Na neprázdné otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^m$ buď dána funkce*

$$f = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m)\colon U \to \mathbb{R}$$

a buď dáno slovo $u = i_1 i_2 \ldots i_k$, $k \in \mathbb{N}$, nad abecedou $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Pro jeho počáteční úseky $v = i_1 i_2 \ldots i_j$, $0 \le j \le k$, definujeme následovně indukcí podle j funkce $f_v\colon U \to \mathbb{R}$.

1. *Pro $j = 0$, kdy $v = \emptyset$, klademe $f_v = f_\emptyset = f$.*

2. *Když $0 < j \le k$, f_w pro $w = i_1 i_2 \ldots i_{j-1}$ je definovaná a na U existuje její parciální derivace*

$$\frac{\partial f_w}{\partial x_{i_j}}\ ,\ \text{pak klademe } f_v = \frac{\partial f_w}{\partial x_{i_j}}\ .$$

Pokud f_w není definovaná nebo pokud je definovaná, ale její parciální derivace podle x_{i_j} neexistuje na celé U, není funkce f_v definovaná.

Je-li výsledná funkce f_u definovaná, nazveme ji parciální derivací funkce f k-tého řádu podle proměnných $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ a označíme ji jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \ .$$

Slovo u, čtené zleva doprava, uvádí proměnné v tom pořadí, jak se podle nich parciálně derivuje. V indexech ve jmenovateli posledního zlomku se u objeví zapsané obráceně.

Parciální derivace vyšších řádů. Pokud má funkce $f:\ U \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a v každém bodě U parciální derivaci $F = \partial_i f$ a tato funkce $F:\ U \to \mathbb{R}$ má v bodě a parciální derivaci $\partial_j F(a) = \partial_j \partial_i f(a)$, řekneme, že f má v bodě a *parciální derivaci druhého řádu podle proměnných x_i a x_j* a její hodnotu značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \ .$$

Podobně definujeme parciální derivace vyšších řádů: má-li $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ v každém bodě $x \in U$ parciální derivaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j \in \{1, 2, \ldots, m\})$

$$F = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}(x)$$

a F má v bodě $a \in U$ parciální derivaci $\partial_j F(a)$, řekneme, že f má v bodě a *parciální derivaci k-tého řádu podle proměnných $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_j$* a její hodnotu značíme

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(a) \ .$$

Na pořadí proměnných při parciálním derivování obecně záleží: jako cvičení dokažte, že funkce $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x^2+y^2 = 0 \ , \end{cases}$$

má v počátku obě smíšené parciální derivace druhého řádu s různými hodnotami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \ \text{ a } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \ .$$

Při spojitých parciálních derivacích však na pořadí proměnných nezáleží.

Tvrzení (obvykle $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$). *Nechť funkce $f:\ U \to \mathbb{R}$ má na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu a parciální derivace druhého řádu $\partial_j \partial_i f$ a $\partial_i \partial_j f$, $i \neq j$, a ty jsou v a spojité. Pak*

$$\partial_j \partial_i f(a) = \partial_i \partial_j f(a) \ .$$

Důkaz. Nechť $m = 2$ a $a = \overline{0} = (0,0)$, obecný případ je velmi podobný. Díky spojitosti obou parciálních derivací v počátku stačí nalézt pro každé (dosti malé) $h > 0$ ve čtverci $[0,h]^2$ dva body σ a τ, v nichž $\partial_x \partial_y f(\sigma) = \partial_y \partial_x f(\tau)$. Pro $h \to 0^+$ pak totiž $\sigma, \tau \to \overline{0}$ a limitní přechod a spojitost obou parciálních derivací v $\overline{0}$ dávají, že $\partial_x \partial_y f(\overline{0}) = \partial_y \partial_x f(\overline{0})$.

Vrcholy čtverce označíme $a = (0,0)$, $b = (0,h)$, $c = (h,0)$, $d = (h,h)$ a uvážíme číslo $f(d) - f(b) - f(c) + f(a)$. Lze ho dvěma způsoby napsat jako rozdíl rozdílů:

$$\begin{aligned} f(d) - f(b) - f(c) + f(a) &= (f(d) - f(b)) - (f(c) - f(a)) = \psi(h) - \psi(0) \\ &= (f(d) - f(c)) - (f(b) - f(a)) = \phi(h) - \phi(0) \,, \end{aligned}$$

kde

$$\psi(t) = f(h,t) - f(0,t) \quad \text{a} \quad \phi(t) = f(t,h) - f(t,0) \,.$$

Máme $\psi'(t) = \partial_y f(h,t) - \partial_y f(0,t)$ a $\phi'(t) = \partial_x f(t,h) - \partial_x f(t,0)$. Lagrangeova věta o střední hodnotě dává dvě vyjádření

$$\begin{aligned} f(d) - f(b) - f(c) + f(a) &= \psi'(t_0)h = (\partial_y f(h,t_0) - \partial_y f(0,t_0))h \\ &= \phi'(s_0)h = (\partial_x f(s_0,h) - \partial_x f(s_0,0))h \,, \end{aligned}$$

kde $0 < s_0, t_0 < h$ jsou mezibody. Použijeme ji ještě jednou na rozdíly parciálních derivací f a máme

$$f(d) - f(b) - f(c) + f(a) = \partial_x \partial_y f(s_1,t_0)h^2 = \partial_y \partial_x f(s_0,t_1)h^2, \ s_1, t_1 \in (0,h) \,.$$

Body $\sigma = (s_1,t_0)$ a $\tau = (s_0,t_1)$ leží ve čtverci $[0,h]^2$ a máme $\partial_x \partial_y f(\sigma) = \partial_y \partial_x f(\tau)$ (protože obě hodnoty se rovnají témuž číslu $(f(d) - f(b) - f(c) + f(a))/h^2$). $\square$

Rovnost hodnot obou derivací lze dokázat i za slabších předpokladů: existuje-li $\partial_x \partial_y f$ v okolí bodu a a je v něm spojitá, potom existuje $\partial_y \partial_x f(a)$ a $\partial_y \partial_x f(a) = \partial_x \partial_y f(a)$.

Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ označíme symbolem $\mathcal{C}^k(U)$ množinu funkcí $f : U \to \mathbb{R}$, jejichž všechny parciální derivace do řádu k včetně jsou na U definované a spojité.

Důsledek. *Pro každou funkci $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ z $\mathcal{C}^k(U)$ hodnoty jejích parciálních derivací až do řádu k nezávisí na pořadí proměnných—pro $l \le k$ a $a \in U$ platí*

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \partial x_{i_{l-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \partial x_{j_{l-1}} \ldots \partial x_{j_1}}(a) \,,$$

jakmile se posloupnosti $(i_1, \ldots, i_l)$ a $(j_1, \ldots, j_l)$ liší jen pořadím členů.

Důkaz. Když je posloupnost $v = (j_1, \ldots, j_l)$ pouze permutací posloupnosti $u = (i_1, \ldots, i_l)$, dokážeme u proměnit ve v prohazováním dvojic členů v u, dokonce stačí prohazovat sousední členy: v u nalezneme člen j_1 a necháme ho „propadnout“ až dolů na první místo, pak necháme propadnout na druhé místo j_2 atd. Rovnost hodnot parciálních derivací tak plyne z předchozího tvrzení. □

V případě spojitých parciálních derivací tak záleží jen na multimnožině proměnných, podle kterých se derivuje, ale ne na jejich pořadí. Místo $\partial_x \partial_x$ píšeme stručněji ∂x^2 apod. Například, pro f z $\mathcal{C}^5(U)$ na U máme

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^5 f}{\partial y^2\, \partial x\, \partial z\, \partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial x\, \partial z\, \partial y^3} = \frac{\partial^5 f}{\partial z\, \partial y^3\, \partial x} .$$

Důležitým nástrojem při studiu funkcí je Taylorův polynom, jenž nyní zobecníme pro více proměnných. Na příkladu vysvětlíme, jak rozumět použitému symbolickému zápisu mocniny diferenciálního operátoru. Nechť $f = f(x, y, z)$ je funkce z $\mathcal{C}^3(U)$ a $a \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Například zápisem

$$(\alpha\partial_y + \beta\partial_z)^3 f(a)$$

se rozumí

$$\begin{aligned} & (\alpha^3(\partial_y)^3 + 3\alpha^2\beta(\partial_y)^2\partial_z + 3\alpha\beta^2\partial_y(\partial_z)^2 + \beta^3(\partial_z)^3)f(a) \\ = \quad & \alpha^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) + 3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(a) + 3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(a) + \beta^3\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(a) . \end{aligned}$$

Podobně pro jiné mocniny.

Věta (zobecnění Taylorova polynomu). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a a $f : U \to \mathbb{R}$ je funkce z $\mathcal{C}^n(U)$. Potom pro každý bod $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, že $a + h \in U$, máme Taylorův rozvoj*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_m\partial_m)^i f(a) + e(h) \\ &= \sum \frac{1}{i_1!i_2!\ldots i_m!} \cdot \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_m^{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_m^{i_m} + e(h) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^{m}\partial_{x_i}f(a)h_i + \sum_{1\le i<j\le m}\partial_{x_i}\partial_{x_j}f(a)h_ih_j + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\partial_{x_i}^2 f(a)h_i^2 + \cdots + e(h) , \end{aligned}$$

kde $e(h)$ je chybová funkce splňující pro $h \to \overline{0}$ odhad $e(h) = o(\|h\|^n)$, tj. $\lim_{h\to\overline{0}} e(h)/\|h\|^n = 0$. V prvním výrazu mocninu chápeme symbolicky (ve výše popsaném smyslu) a ve druhém, kde jsme ji rozvinuli podle multinomické věty, v sumě sčítáme přes všechny m-tice nezáporných celých čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ se součtem nejvýše n. Ve třetím výrazu jsme uvedli začátek rozvoje pro hodnoty $i = 0, 1$ a 2.

3.2 Extrémy funkcí více proměnných

Vzpomeňme si na klasickou postačující podmínku pro existenci lokálního extrému funkce $f(x)$ jedné proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}$: z jejího Taylorova polynomu stupně 2 (se středem v a)

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2),\ h \to 0\ ,$$

ihned vidíme, že

1. pokud $f'(a) \neq 0$, funkce f nemá v a lokální extrém;
2. pokud $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, funkce f má v a ostré lokální minimum a
3. pokud $f'(a) = 0$ a $f''(a) < 0$, funkce f má v a ostré lokální maximum.

Pokud $f'(a) = f''(a) = 0$, nelze bez další analýzy o existenci extrému v a říci nic. Pokud $f'(a) = 0$ (a je „podezřelý" bod), nemůžeme tedy jen ze samotné hodnoty druhé derivace $f''(a)$ nikdy vydedukovat *neexistenci* lokálního extrému. Jak uvidíme, pro funkce více proměnných je situace jiná. Uvedenou postačující podmínku nyní zobecníme na tyto funkce.

Nejprve ale zavedeme značení a oživíme si pár věcí z lineární algebry. Nechť $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická ($a_{i,j} = a_{j,i}$) reálná $n \times n$ matice. Přiřadíme jí kvadratickou formu (= homogenní polynom stupně 2) o n proměnných

$$P_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = xAx^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j\, :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ,$$

kde x označuje řádkový vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a x^T je týž vektor psaný transponovaně ve sloupci. Zřejmě $P_A(\overline{0}) = 0$ a $P_A(tx) = t^2 P_A(x)$ (díky homogenitě P) pro každou matici A, vektor $x \in \mathbb{R}^n$ a skalár $t \in \mathbb{R}$. Matice A se nazývá

- *pozitivně (resp. negativně) definitní*, když $P_A(x) > 0$ (resp. $P_A(x) < 0$) pro každý bod $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\overline{0}\}$;
- *pozitivně (resp. negativně) semidefinitní*, když $P_A(x) \geq 0$ (resp. $P_A(x) \leq 0$) pro každý bod $x \in \mathbb{R}^n$ a
- *indefinitní*, není-li ani pozitivně ani negativně semidefinitní, to jest $P_A(x) > 0$ a $P_A(y) < 0$ pro nějaké dva body $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Vzhledem ke zmíněné rovnosti $P_A(tx) = t^2 P_A(x)$ určují definitnost A už hodnoty P_A na *jednotkové sféře*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

(proč?). Jak poznat definitnost A se o něco podrobněji zmíníme později.

Připomeneme nomenklaturu extrémů. Funkce $f:\ U \to \mathbb{R}$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a, má v a *ostré lokální minimum*, existuje-li takové $\delta > 0$, že

$0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a)$. *(Neostré) lokální minimum* v a znamená, že $\|x-a\| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$. Podobně pro ostré lokální maximum a (neostré) lokální maximum. Funkce f *nemá v a lokální extrém*, nemá-li v a ani lokální minimum ani lokální maximum, to jest pro každé $\delta > 0$ existují takové dva body x, y, že $\|x-a\|, \|y-a\| < \delta$ a $f(y) < f(a) < f(x)$. Funkce $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$, *nabývá na množině M maximum v bodě $a \in M$*, když $f(a) \geq f(b)$ pro každý bod $b \in M$. Podobně pro nabývání minima.

V ZS jsme dokázali větu pro funkce jedné proměnné: každá funkce $f: I \to \mathbb{R}$, spojitá na kompaktním intervalu I (tj. $I = [a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$), nabývá na I maximum i minimum. Budeme potřebovat ji zobecnit na více proměnných. Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je *omezená*, když existuje takový poloměr $R > 0$, že $M \subset B(\overline{0}, R)$, a je *uzavřená*, když její doplněk $\mathbb{R}^m \backslash M$ je otevřená množina (to jest každý bod b mimo M leží mimo M i s nějakou celou koulí se středem v b). Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je *kompaktní*, když je současně omezená a uzavřená.

Věta (nabývání extrémů na kompaktu). *Nechť je funkce $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná kompaktní množina, na M spojitá. Pak f nabývá na M minimumm i maximum.*

Důkaz. Zatím bez důkazu. Podáme ho pravděpodobně později v partii o metrických prostorech. □

Například výše definovaná jednotková sféra S je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$, a proto každá spojitá funkce $f: S \to \mathbb{R}$ nabývá na S minimum i maximum.

Poslední definice před větou o lokálních extrémech: *Hessova matice $H_f(a)$ funkce f v bodě a*, kde $f: U \to \mathbb{R}$ a $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a a f má na U všechny derivace druhého řádu, je matice zaznamenávající hodnoty těchto derivací:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{m}.$$

Podle tvrzení o $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$ je pro funkci z $\mathcal{C}^2(U)$ (tj. se spojitými druhými derivacemi na U) její Hessova matice symetrická.

Věta (o lokálních extrémech). *Nechť $f \in \mathcal{C}^2(U)$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a. Připomeňme, že (gradient) $\nabla f(a)$ je vektor hodnot prvních derivací a (Hessova matice) $H_f(a)$ je matice hodnot druhých derivací.*

1. *Pokud $\nabla f(a) \neq \overline{0}$, nemá f v a ani neostrý lokální extrém. (Zde stačí předpokládat pouze existenci gradientu $\nabla f(a)$.)*
2. *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a $H_f(a)$ je pozitivně (resp. negativně) definitní, potom má f v a ostré lokální minimum (resp. maximum).*
3. *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a $H_f(a)$ je indefinitní, nemá f v a lokální extrém.*

Důkaz. 1. Pokud $\nabla f(a) \neq \overline{0}$, pak např. $\partial_{x_1} f(a) > 0$ (pro $\partial_{x_1} f(a) < 0$ postupujeme obdobně), a $f(a_1+h, a_2, \ldots, a_m) = f(a)+\partial_{x_1} f(a)h+o(h)$ pro $h \to 0$. Existuje tedy takové $\delta > 0$, že pro $h \in (-\delta, 0)$ máme $f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) - f(a) < \frac{1}{2}\partial_{x_1} f(a)h < 0$ a pro $h \in (0, \delta)$ máme $f(a_1+h, a_2, \ldots, a_m)-f(a) > \frac{1}{2}\partial_{x_1} f(a)h > 0$. Proto funkce f nemá v a ani neostrý lokální extrém.

2. Nyní $\nabla f(a) = \overline{0}$. Kvadratickou formu $xH_f(a)x^T$ označíme jako $P(x)$ a f aproximujeme v okolí a Taylorovým polynomem stupně $n = 2$ (podle věty o Taylorově polynomu). Sčítanec $f(a)$ odpovídající $i = 0$ převedeme vlevo, sčítanec s $i = 1$ zmizí, protože $\nabla f(a) = \overline{0}$. Dále je $P(x)$ homogenní polynom stupně 2. Pro $\|h\| \to 0$ tak máme vyjádření

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_m\partial_m)^i f(a) + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2} hH_f(a)h^T + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2} P(h_1, h_2, \ldots, h_m) + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\|h\|^2 \Big(P(h_1/\|h\|, h_2/\|h\|, \ldots, h_m/\|h\|) + o(1) \Big) \\
&= \frac{1}{2}\|h\|^2 (P(e(h)) + o(1)) \;,
\end{aligned}$$

kde vektor $e(h) = (h_1/\|h\|, h_2/\|h\|, \ldots, h_m/\|h\|)$ leží na jednotkové sféře S. Jak jsme se již zmínili, S je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^m$ a funkce $P(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, která je jistě spojitá na celém $\mathbb{R}^m$, na S nabývá minimum a maximum:

$$\mu = P(\alpha) = \min_{\|x\|=1} P(x) \;\text{ a }\; M = P(\beta) = \max_{\|x\|=1} P(x)$$

pro nějaké dva vektory $\alpha, \beta \in S$. Pozitivní (resp. negativní) definitnost $H_f(a)$ je ekvivalentní nerovnostem $0 < \mu \leq M$ (resp. $\mu \leq M < 0$) a indefinitnost je ekvivalentní nerovnostem $\mu < 0 < M$.

Je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, máme $P(e) \geq \mu > 0$ pro každý vektor $e \in S$, a tak existuje takové $\delta > 0$, že pro každé h splňující $0 < \|h\| < \delta$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2(P(e) + o(1)) > \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \frac{\mu}{2} > 0 \;.$$

Takže f má v a ostré lokální minimum. Podobně pro negativně definitní $H_f(a)$ dostáváme v a ostré lokální maximum.

3. Když je $H_f(a)$ indefinitní, pak existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $t \in (0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned}
f(a+t\alpha) - f(a) &= \frac{t^2}{2}(P(\alpha) + o(1)) < \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\mu}{2} < 0 \;\text{ a} \\
f(a+t\beta) - f(a) &= \frac{t^2}{2}(P(\beta) + o(1)) > \frac{t^2}{2} \cdot \frac{M}{2} > 0 \;.
\end{aligned}$$

Takže f nemá v a lokální extrém. $\square$

Poznámky. Podle této věty funkce, která má v každém bodu otevřené množiny U gradient, může mít lokální extrém pouze v bodech, v nichž je gradient nulový. Těmto bodům se říká *stacionární body*. Dostaneme je jako řešení rovnice $\nabla f(a) = 0$. Když je matice $H_f(a)$ semidefinitní, neříká věta nic, funkce může mít v a extrém a nemusí. Konečně zdůrazněme, že se věta týká otevřených množin U, respektive vnitřních bodů množin. Pokud $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^m$, a bod $a \in M$ není vnitřním bodem M, to jest neleží v M spolu s nějakým svým okolím, pak stále může f mít v a lokální extrém vzhledem k M, i když je gradient $\nabla f(a)$ nenulový vektor. Lokálními extrémy v hraničních bodech množin se budeme zabývat později, v partii o Lagrangeových multiplikátorech.

Poznámky o definitnosti matic. Nechť $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matice a $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$ je jí odpovídající kvadratická forma. Z lineární algebry víme, že existuje taková regulární matice $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, že po změně proměnných $x^T = By^T$ přejde P do tvaru

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(b_{1,1}y_1 + \cdots + b_{1,n}y_n, \ldots, b_{n,1}y_1 + \cdots + b_{n,n}y_n) = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \ ,$$

kde $d_i \in \{-1, 0, 1\}$. Ekvivalentně,

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_i (c_{i,1}x_1 + c_{i,2}x_2 + \cdots + c_{i,n}x_n)^2 \ ,$$

kde $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je inverzní k B. Počty koeficientů d_i rovných $-1, 0$ a 1 v tomto vyjádření jsou určené jednoznačně maticí A (nezávisejí na změně proměnných B) a udávají tzv. signaturu kvadratické formy P. Jsou-li všechny d_i rovny 1 (resp. -1), je A pozitivně (resp. negativně) definitní. Je-li některé d_i rovno 1 a jiné -1, je A indefinitní. Jsou-li všechny d_i rovny 1 nebo 0, je A pozitivně semidefinitní, a ve zbývajícím případě -1 a 0 je A negativně semidefinitní. Do tohoto tvaru $P =$ součet $\pm$ čtverců lze P při malém počtu proměnných $n = 2$ či $n = 3$ transformovat snadno ručně, viz počítání v následujícím příkladu.

Připomeňme ještě *Sylvestrovo kritérium definitnosti* z lineární algebry: pokud jsou všechny subdeterminanty $d_m = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^m$, $1 \le m \le n$, nenulové, pak, jsou-li všechny kladné, je matice A pozitivně definitní, nastává-li $(-1)^m d_m > 0$, $1 \le m \le n$, je A negativně definitní, a jinak je indefinitní; o případu, kdy $d_m = 0$ pro alespoň jedno m, Sylvestrovo kritérium neříká nic.

Příklad. Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2 \ .$$

Řešení (nebylo uvedeno na přednášce). Definiční obor $\mathbb{R}^2$ je otevřená množina, a pro hledání lokálních extrémů tak můžeme bez problémů použít větu o lokálních extrémech. Máme

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f) = (-y\sin x - \cos x, 2y + \cos x)$$

a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & \partial^2_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\cos x + \sin x & -\sin x \\ -\sin x & 2 \end{pmatrix} .$$

Vyřešíme soustavu rovnic $\nabla f(x,y) = (0,0)$:

$$-y\sin x - \cos x = 0,\ 2y + \cos x = 0 .$$

Sečtením rovnic obdržíme $y(2 - \sin x) = 0$. Nutně (neboť $|\sin x| \leq 1$) $y = 0$, a tedy $\cos x = 0$. Dostáváme stacionární body

$$s_k = (\pi/2 + k\pi, 0),\ k \in \mathbb{Z} .$$

Podle věty o lokálních extrémech má f lokální extrémy pouze v těchto bodech.

Máme

$$H_f(s_k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 2 \end{pmatrix} ,$$

to jest

$$H_f(s_k) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ pro liché } k \text{ a } H_f(s_k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ pro sudé } k .$$

První matice je indefinitní, protože

$$P(x,y) = -x^2 + 2xy + 2y^2 = -(x-y)^2 + 3y^2,$$

a druhá je pozitivně definitní, protože

$$P(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2 .$$

Pro liché k není v s_k lokální extrém a pro sudé k je v s_k ostré lokální minimum, vždy s hodnotou

$$f(s_{2k}) = -3 .$$

Jediné lokální extrémy funkce f tedy jsou tato ostrá lokální minima.

Globální maximum neexistuje, protože f je shora neomezená: $f(\pi/2, y) = y^2 - 3$. Jiný důvod je ten, že f nemá žádné lokální maximum (a globální maximum by muselo být i lokálním maximem). Nalezneme globální minima. Definiční obor $\mathbb{R}^2$ není kompaktní (není omezený), nelze hned použít větu o extrémech spojitých funkcí na kompaktech. Funkce f je však 2π-periodická v x (tj. $f(x \pm 2\pi, y) = f(x,y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$) a pro vyšetření globálních minim stačí uvážit její hodnoty ve svislém nekonečném pásu

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, y \in \mathbb{R}\} .$$

Na jeho hranici máme

$$f(0,y) = f(2\pi,y) = y^2 + y - 2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} > -3 \ .$$

Ještě ale nejsme hotovi. I když hodnoty f na hranici pásu P jsou větší než -3, pás sám je nekompaktní a pro $y \to \pm\infty$ by někde uprostřed něj mohla f klesat do hodnot menších než -3, třeba do $-\infty$, a globální minimum by nemuselo existovat. Jednoduchý odhad však ukazuje, že f se tak nechová. Pro $|y| \geq 2$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ máme

$$f(x,y) \geq y^2 - |y| - 3 = \left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \geq -1 > -3 \ .$$

Když tedy pás P rozložíme na disjunktní sjednocení

$$P = P_1 \cup P_2 \ ,$$

kde $P_1 = [0, 2\pi] \times [-2, 2]$ je kompaktní obdélník a P_2 je nekompaktní zbytek, pro každé $a \in P_2$ platí $f(a) \geq -1 > f(s_0) = -3$, přičemž $s_0 \in P_1$. Všechny hodnoty f na P_2 jsou větší než hodnota f v bodu s_0. Na hranici obdélníka P_1 má f vždy hodnotu alespoň $\min(-9/4, -1) = -9/4 > -3$ a na jeho vnitřku, což je otevřená množina, má f jediné lokální minimum $f(s_0) = -3$. Proto má f na obdélníku P_1 i na celém pásu P jediné ostré globální minimum $f(s_0) = -3$. Z 2π-periodičnosti v proměnné x plyne, že hodnoty $f(s_{2k}) = -3$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou právě všechna neostrá globální minima funkce f na $\mathbb{R}^2$.

Závěr. Jediné lokální extrémy f jsou ostrá lokální minima $f(s_{2k}) = -3$ v (nekonečně mnoha) bodech $s_{2k} = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$. Tyto body jsou i body neostrého globálního minima funkce f. Globální maximum f nemá. □

Implicitní funkce. Jak víme z lineární algebry, soustava n lineárních rovnic o n neznámých $a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \cdots + a_{i,n}y_n + b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ jsou dané a $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n \neq 0$, má pro každou volbu n konstant b_i jednoznačné řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Navíc toto řešení y_j je jakožto funkce volených konstant b_i homogenní lineární funkce: $y_j(b_1, b_2, \ldots, b_n) = c_{j,1}b_1 + c_{j,2}b_2 + \cdots + c_{j,n}b_n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, pro jisté konstanty $c_{j,i} \in \mathbb{R}$ (to plyne z Cramerova vzorce vyjadřujícího řešení nehomogenní lineární soustavy ve tvaru podílu dvou determinantů).

Tento výsledek nyní zobecníme na situaci, kdy jsou lineární funkce nahrazeny obecnými funkcemi a kdy v každé rovnici lze předem zvolit více než jeden parametr. Vezmeme soustavu n rovnic o $m + n$ neznámých

$$\begin{array}{rcl} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \ , \end{array}$$

kde F_i jsou reálné funkce definované na okolí bodu (x_0, y_0) v $\mathbb{R}^{m+n}$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^m$ a $y_0 \in \mathbb{R}^n$, který je řešením této soustavy, to jest $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = \cdots = F_n(x_0, y_0) = 0$. Jak uvidíme, za jistých předpokladů lze neznámé $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ze soustavy eliminovat a vyjádřit je, lokálně v okolí x_0, jako funkce $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Nejprve ale zavedeme značení. Pro zobrazení $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ a $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, přičemž $F_i = F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ a $f_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, označíme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a

$$F'_x(x,y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n,m}(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$F'_y(x,y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n,m}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x)\ .$$

První a třetí matice mají rozměr $n \times m$, druhá matice je čtvercová s rozměrem $n \times n$.

Věta (o implicitních funkcích). *Nechť*

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : \ W \to \mathbb{R}^n$$

je zobrazení definované na okolí $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ bodu (x_0, y_0), kde $x_0 \in \mathbb{R}^m$ a $y_0 \in \mathbb{R}^n$, které splňuje následující podmínky.

1. $F_i = F_i(x, y) \in \mathcal{C}^1(W)$ *pro* $1 \le i \le n$.
2. $F_i(x_0, y_0) = 0$ *pro* $1 \le i \le n$.
3. $\det(F'_y(x_0, y_0)) \ne 0$.

Potom existují okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ bodů x_0 a y_0 taková, že $U \times V \subset W$ a pro každý bod $x \in U$ existuje právě jeden bod $y \in V$ splňující $F_i(x, y) = 0$ pro $1 \le i \le n$. Jinak řečeno, existuje zobrazení $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \ U \to V$ takové, že

$$\forall (x, y) \in U \times V : \ F(x, y) = \overline{0} \iff y = f(x)\ .$$

Navíc každá funkce f_i je v $\mathcal{C}^1(U)$, takže zobrazení f je diferencovatelné na U a jeho Jacobiho matice $f'(x)$ v bodě $x \in U$ splňuje

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))\ .$$

Důkaz této věty dělat nebudeme. Naznačíme ale, jak ze vztahů

$$F_k(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0,\ 1 \le k \le n \ \text{ a } \ x \in U\ ,$$

a z $f_i \in \mathcal{C}^1(U)$ plyne hořejší formule pro $f'(x)$ a také praktičtější explicitní formule pro $\partial_i f_j(x)$. Parciálním derivováním těchto n rovnic podle proměnné x_i dostáváme n vztahů

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x, f(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0,\ 1 \le k \le n\ .$$

To je soustava n rovnic s n neznámými $\partial_i f_j(x)$, $1 \le j \le n$, kterou zapíšeme maticově jako

$$F'_y \cdot \partial_i f = -\partial_i F\ ,$$

kde $F'_y = F'_y(x, f(x))$, $\partial_i F$ je sloupcový vektor $(\partial_{x_i} F_1, \partial_{x_i} F_2, \ldots, \partial_{x_i} F_n)^T$, $\partial_i f$ je analogický sloupcový vektor pro f a argumenty parciálních derivací $x, f(x)$ a x pro stručnost vynecháváme. Odtud už pomocí lineární algebry plynou vztahy

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$$

a

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\frac{\det(\partial_{y_1} F, \ldots, \partial_{y_{j-1}} F, \partial_{x_i} F, \partial_{y_{j+1}} F, \ldots, \partial_{y_n} F)}{\det(\partial_{y_1} F, \partial_{y_2} F, \ldots, \partial_{y_n} F)}$$

(v bodech $x \in U$ a $(x, f(x)) \in U \times V$).

Jako příklad na větu o implicitních funkcích ukážeme, že soustava rovnic

$$x + y - \sin z = 0 \ \text{ a } \ -x^3 - y^3 + \mathrm{e}^z - 1 = 0$$

definuje v okolí bodu $x = 0$ dvě funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy $\mathcal{C}^1$ s hodnotami $y(0) = z(0) = 0$ a spočteme hodnoty derivací $y'(0)$ a $z'(0)$.

Položíme $F_1(x, y, z) = x + y - \sin z$, $F_2(x, y, z) = -x^3 - y^3 + \mathrm{e}^z - 1$ a $F = (F_1, F_2)$. Skutečně $F(0, 0, 0) = (0, 0)$ a jacobián soustavy J je nenulový:

$$\begin{aligned} J = \det(\partial_y F(0,0,0)^T, \partial_z F(0,0,0)^T) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos z \\ -3y^2 & \mathrm{e}^z \end{pmatrix} (0,0,0) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

Předpoklady věty o implicitních funkcích jsou splněny a uvedené funkce $y(x)$ a $z(x)$ jsou na nějakém okolí nuly definovány. Protože

$$\partial_x F(0,0,0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3x^2 \end{pmatrix} (0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

podle vztahů uvedených na konci předešlé přednášky máme

$$y'(0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{J} = -1 \text{ a } z'(0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{J} = 0 \; .$$

Vázané extrémy. Z věty o implicitních funkcích lze odvodit (pro důkaz však nemáme čas) zobecnění první části věty o lokálních extrémech — nutná podmínka pro lokální extrém funkce v bodě otevřené množiny je nulovost všech parciálních derivací — na extrémy na množině zadané soustavou rovnic. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a

$$f, F_1, \dots, F_n : \; U \to \mathbb{R}$$

jsou funkce z $\mathcal{C}^1(U)$, přičemž $n < m$. Hledáme lokální extrémy funkce f na množině

$$H = \{x \in U \mid F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0\} \; .$$

Typicky tato množina nemá žádný vnitřní bod a větu o lokální extrémech nelze použít. Příkladem je jednotková sféra v $\mathbb{R}^m$:

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 - 1 = 0\} \; .$$

Následující tvrzení udává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkce f v bodě množiny H.

Důsledek (Lagrangeovy multiplikátory). *Nechť $a \in H$. Jsou-li vektory $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_n(a)$ z $\mathbb{R}^m$ lineárně nezávislé a vektor $\nabla f(a)$ není jejich lineární kombinací, pak f nemá v bodu a vzhledem k množině H ani neostrý lokální extrém.*

Ekvivalentně: jsou-li $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_n(a)$ lineárně nezávislé a funkce f má v bodě a vzhledem k množině H (ostrý či neostrý) lokální extrém, potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tzv. Lagrangeovy multiplikátory*, že*

$$\nabla f(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(a) = \overline{0} \; ,$$

to jest $\partial_{x_j} f(a) - \lambda_1 \partial_{x_j} F_1(a) - \dots - \lambda_n \partial_{x_j} F_n(a) = 0$ pro $1 \leq j \leq m$.

Pro ilustraci metody si spočteme dva jednoduché příklady. V **prvním příkladu** nalezneme extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ vzhledem k množině $H \subset \mathbb{R}^2$ dané rovnicí

$$H : \; F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \; ,$$

což je jednotková kružnice se středem v počátku. Máme $\nabla F = (2x, 2y)$ a $\nabla f = (1,1)$. Patrně $\nabla F = \overline{0}$ pouze v $\overline{0} \notin H$, tedy $\nabla F \neq \overline{0}$ na H a předpoklad lineární nezávislosti gradientů rovnicových funkcí je splněn. Podle Lagrangeových multiplikátorů jsou body, v nichž má f lokální extrém vzhledem k H, obsaženy v řešeních soustavy

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \; 1 = 2\lambda x \;\text{ a }\; 1 = 2\lambda y \; .$$

Odečtením posledních dvou rovnic dostáváme $\lambda(x-y)=0$. Protože λ nemůže být 0, je $x=y$. Dosazením do první rovnice dostaneme, že $x=y=\lambda=\pm 1/\sqrt{2}$, což dává přesně dvě řešení dané soustavy. Podezřelé body tak jsou

$$a=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}) \ \text{ a } \ b=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\ .$$

Množina H je kompaktní a f je na ní spojitá, a proto f nabývá na H minimum i maximum. To jsou i lokální extrémy f. Protože $f(a)=-\sqrt{2}$ a $f(b)=\sqrt{2}$, má f na H v a globální minimum a v b globální maximum.

Druhý příklad ukazuje, že předpoklad lineární nezávislosti gradientů rovnicových funkcí nelze pominout. Vezměme si množinu $H\subset\mathbb{R}^2$ danou rovnicí

$$H:\ F(x,y)=y^2-x^3=0\ ,$$

což je sjednocení grafů fukcí $y=x^{3/2}$ a $y=-x^{3/2}$ pro $x\ge 0$. Hledejme na H extrémy funkce $f(x,y)=x$. Máme $\nabla F=(-3x^2,2y)$ a $\nabla f=(1,0)$. Pro podezřelé body dávají Lagrangeovy multiplikátory soustavu

$$y^2-x^3=0,\ 1=-3\lambda x^2 \ \text{ a } \ 0=2\lambda y\ .$$

Ta nemá řešení (z třetí rovnice je $\lambda=0$ nebo $y=0$ a obojí vede ke sporu s druhou rovnicí). Takže f nemá na H lokální extrém. To je však **chybný závěr**, protože f má zjevně v bodě $(0,0)\in H$ na H ostré globální minimum s hodnotou $f=0$. Udělali jsme tu chybu, že jsme neověřili nenulovost vektoru ∇F v bodě $(0,0)$. A právě v něm se gradient ∇F anuluje, tj. předpoklad lineární nezávislosti v něm není splněn.

3.3 Poznámky a další úlohy

Kapitola 4

Metrické prostory

4.1 Základní definice a kompaktní množiny

Definice metrického prostoru. Příklady, zejména euklidovská metrika, supremová, grafová a Hammingova.

S funkcí vzdálenosti $d(x,y)$ jsme zatím pracovali jen v euklidovských prostorech $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Na začátku oddílu 3.1 jsme viděli, že je tam odvozena z normy $\|x\|$ a dále ze skalárního součinu vektorů: pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ je

$$d(x,y) = \|x-y\|^{1/2} = \langle x-y,\, x-y\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} .$$

Tři základní vlastnosti funkce $d(x,y)$ — nezápornost, symetrii a trojúhelníkovou nerovnost (viz začátek oddílu 3.1) — nyní postulujeme jako určující pro abstraktní prostor se vzdáleností, tak zvaný metrický prostor.

Definice 4.1.1 (metrický prostor). *Metrický prostor je dvojice (M,d) neprázdné množiny M a funkce dvou proměnných*

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}\ ,$$

zvané vzdálenost či metrika, vyhovující třem následujícím axiomům.

1. *Pro každé $x, y \in M$ je $d(x,y) \ge 0$. Dále $d(x,y) = 0 \iff x = y$.*
2. *Pro každé $x, y \in M$ je $d(x,y) = d(y,x)$.*
3. *Pro každé $x, y, z \in M$ platí trojúhelníková nerovnost: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.*

Úloha 4.1.2. *Ukažte, že nezápornost metriky v axiomu 1 se nemusí požadovat, protože se dá odvodit z ostatních axiomů.*

Uvedeme několik příkladů metrických prostorů.

Příklad 4.1.3. *Nechť $M = \mathbb{R}^m$ pro $m \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Metriku na M definujeme vztahem ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$)*

$$d_p(x,\, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} .$$

Dokážeme, že (M, d_p) je metrický prostor podle definice 4.1.1.

První dva axiomy jsou splněné triviálně. Přesněji, jejich splnění hned plyne z triviálních vlastností absolutní hodnoty a reálné mocniny: pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $|x| = |-x|$ a $|x| \geq 0$, s rovností jen pro $x = 0$, a dále pro reálná čísla $x \geq 0$ a $\alpha > 0$ je $x^\alpha \geq 0$ a rovnost opět nastává jen pro $x = 0$. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost je podstatně obtížnější. $\square$

Pro $m = 1$ dostáváme klasickou metriku $|x-y|$ na reálné ose $\mathbb{R}$ a pro $p = 2, m \geq 2$ výše zmíněnou euklidovskou metriku. Pro $p = 1, m \geq 2$ dostáváme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x,\, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x,\, y) := \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i| .$$

Úloha 4.1.4. *Ověřte, že skutečně*

$$\lim_{p \to \infty} d_p(x,\, y) = d_\infty(x,\, y) .$$

Příklad 4.1.5 (supremová metrika). *Za M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f\colon X \to \mathbb{R}$ definovaných na množině X. Na M pak máme* supremovou metriku

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| .$$

Je vlastně odvozená ze supremové normy

$$\|f\| = \sup_{x \in M} |f(x)| = \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) .$$

První dva axiomy metrického prostoru jsou splněné triviálně. Trojúhelníková nerovnost vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti pro metrický prostor $\mathbb{R}^1$. Pro supremovou normu skutečně máme

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{x \in M} |f(x) + g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in M} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in M} |f(x)| + \sup_{x \in M} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\| . \end{aligned}$$

□

Pokud $M = \mathcal{C}(a,b)$ — množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$ — supremum se nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,\, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|\ .$$

Příklad 4.1.6 (grafová metrika). *Pro souvislý graf $G = (M,E)$ s množinou vrcholů M máme metriku*

$$d(u,v) = \textit{počet hran na nejkratší cestě v } G \textit{ spojující vrcholy } u \textit{ a } v\ .$$

Příklad 4. Je-li A množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu metriku* ($u = a_1a_2\ldots a_m, v = b_1b_2\ldots b_m$)

$$d(u,v) = \text{počet souřadnic } i, \text{ pro něž } a_i \neq b_i\ .$$

Měří míru odlišnosti obou slov, tj. jaký nejmenší počet změn v písmenech stačí k přeměně u ve v.

V rychlosti zavedeme pár základních pojmů; s mnohými jsme se již setkali u eukleidovských prostorů. Nechť (M,d) je metrický prostor. Pak

- *(otevřená) koule* v M se středem v bodu $a \in M$ a poloměrem $\mathbb{R} \ni r > 0$ je množina $B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}$;
- $A \subset M$ je *otevřená množina*, pokud $\forall a \in A\ \exists r > 0 :\ B(a,r) \subset A$;
- $A \subset M$ je *uzavřená množina*, je-li $M\backslash A$ otevřená množina;
- $A \subset M$ je *omezená množina*, pokud existuje bod $a \in M$ a poloměr $r > 0$, že $A \subset B(a,r)$;
- $A \subset M$ je *kompaktní množina*, pokud každá posloupnost bodů $(a_n) \subset A$ má konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v A.

Konvergence a limita se zobecňují z reálné osy na obecný metrický prostor zřejmým způsobem: posloupnost $(a_n) \subset M$ je *konvergentní a za limitu má bod* $a \in M$, psáno $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow d(a_n,a) < \varepsilon\ .$$

Jinak řečeno, $\lim_{n\to\infty} d(a_n,a) = 0$ (převedli jsme to na limitu reálné posloupnosti).

Již jsme dříve zmínili vlastnosti otevřených množin: $\emptyset$ i M jsou otevřené, sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina a průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina (důkazy si rozmyslete jako cvičení). Přechodem k doplňkům máme duální vlastnosti uzavřených množin: $\emptyset$ i M jsou uzavřené, sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Následující tvrzení ukazuje, že uzavřené množiny jsou uzavřené na limity.

Tvrzení (charakterizace uzavřených množin). *$A \subset M$ je uzavřená množina v metrickém prostoru M, právě když limita každé její konvergentní podposloupnosti $(a_n) \subset A$ leží v A.*

Důkaz. Nechť $A \subset M$ je uzavřená množina a $(a_n) \subset A$ je konvergentní posloupnost. Kdyby $\lim_{n\to\infty} a_n = a \notin A$, existoval by poloměr $r > 0$, že $B(a, r) \subset M \backslash A$. Pak ale $d(a_n, a) \geq r$ pro každé n, ve sporu s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Tedy $a \in A$. Naopak, není-li $A \subset M$ uzavřená množina, podle definice existuje takový bod $a \in M\backslash A$, že pro každý poloměr $r > 0$ je $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Položíme $r = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, a pro každé n zvolíme libovolně bod $a_n \in B(a, 1/n) \cap A$. Pak $(a_n) \subset A$ a je to konvergentní posloupnost s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ale $a \notin A$. □

4.2 Základní věta algebry

Bla

Následující věta vyjadřuje základní vlastnost tělesa $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ komplexních čísel vzhledem k jeho aritmetickým operacím.

Věta 4.2.1 (ZVAlg, s důkazem). *Pro každou $(k + 1)$-tici čísel $a_0, a_1, \ldots, a_k$ v $\mathbb{C}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $a_k \neq 0$, existuje číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \alpha^j = 0 \ .$$

V oboru reálných čísel $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ to samozřejmě neplatí: pro trojici $a_0 = 1, a_1 = 0$ a $a_2 = 1$ žádné takové $\alpha \in \mathbb{R}$ neexistuje.

Úloha 4.2.2. *Dokažte, že ZVAlg platí v oboru $\mathbb{R}$ pro liché k.*

4.3 Poznámky a další úlohy

Návody k řešení skoro všech úloh

Úloha 0.0.1. Školský němčinář, kterým autor je, očekává tvar „... geschaffen hat, ...“, a takto i mnohé internetové zdroje D. Hilberta „citují“. Podle A. Pultra se však jedná o přípustnou poetickou výpustku.

Úloha 1.1.2. To plyne hned z linearity derivace.

Úloha 1.1.4. Přechod k rozdílové funkci $F-G$, použití věty o střední hodnotě na ni, linearita derivace, předpoklad $F' = G'$.

Úloha 1.1.5. Funkce signum a její modifikace např. pro $x > 0$.

Úloha 1.1.8. Funkce f nabývá libovolně blízko u 0 hodnoty skoro 1 i hodnoty skoro -1. Je-li obecná funkce g omezená v okolí 0, pak $xg(x) \to 0$ pro $x \to 0$.

Úloha 1.1.11. Aby F vůbec byla funkcí a měla v a_1 jedinou hodnotu.

Úloha 1.1.15. K je relativně otevřený v J, pokud $K = J \cap L$ pro nějaký otevřený interval L. Např. $[0, \frac{1}{2})$ je relativně otevřený v $[0, 1]$.

Úloha 1.1.19. Použijte důsledek Lagrangeovy věty o střední hodnotě z *MA I* [5], tvrzení o limitě derivace.

Úloha 1.1.25. $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$.

Úloha 1.1.27. Obě funkce jsou primitivní k $\frac{1}{x}$ na různých (a disjunkktních) intervalech, ale ne na společném intervalu.

Úloha 1.1.31. Pro $a = 0$ je $f(ax + b)$ konstantní funkce s primitivní funkcí $f(b)x + c$ (na libovolném intervalu).

Úloha 1.1.36. Jako $+\infty$. Pišme $a_i(x) = (x-\alpha)^{m_i} b_i(x)$ s $m_i \in \mathbb{N}$ a $b_i(\alpha) \neq 0$. Nechť $m_1 < m_2, \ldots, m_k$. Pak $\sum_i a_i(x) = (x-\alpha)^{m_1}(b_1(x) + \sum_{i>1}(x-\alpha)^{m_i - m_1} b_i(x)) = (x-\alpha)^{m_1} b(x)$ a $b(\alpha) \neq 0$.

Úloha 1.2.7. Pokud $m = \deg p \geq n = \deg q$, existuje $a \in F$, že $\deg(p - ax^{m-n}q) < \deg p$. Pro důkaz jednoznačnosti odečtěte dvě taková vyjádření polynomu $p(x)$ a podívejte se na stupně ve výsledném výrazu.

Úloha 1.2.10. Použijte, že pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a $P \in \mathbb{C}[x]$ je $P(\alpha) = 0$, právě když $x - \alpha$ dělí $P(x)$, a že $\mathbb{R}[x]$ je obor integrity, pro $P \neq 0$ je $PQ = PR \Rightarrow Q = R$.

Úloha 1.2.12. Je-li $P \in F[x]$ s vedoucím koeficientem $a \in F$, pak $P(x) = aQ(x)$, kde Q je monický.

Úloha 1.2.14. Plyne to z následující úlohy.

Úloha 1.2.15. Pokud jsou soudělné, je kořen jejich společného nekonstantního dělitele jejich společný kořen. Mají-li společný kořen, pak vzhledem ke vztahu reálné a komplexní faktorizace reálného polynomu jejich reálné faktorizace mají společný činitel, což je jejich společný nekonstantní dělitel.

Úloha 1.2.17. $a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{2i})$.

Úloha 1.3.2. Pokud $f, g \in \Delta$ a $f(x) \neq g(x)$, pak pro velké n je $f_n(x) \neq g_n(x)$ a tato nerovnost platí i v každém racionálním čísle y dostatečně blízkém x.

Úloha 1.3.3. Znamenají existenci injekce z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do $\Delta(I)$ a naopak. Rovnost kardinalit znamená existenci bijekce a plyne z Cantorovy–Bernsteinovy věty (viz *MAI* [5]).

Úloha 1.3.6. Nechť $f(x) = x$ a $g\colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ je rostoucí bijekce

Úloha 2.1.3. Protože mezi sčítanci nikdy není současně $+\infty$ a $-\infty$.

Úloha 2.1.7. Postupujte jako v důkazu tvrzení 2.1.11.

Úloha 2.1.18. Protože $S(f, D) - s(F, D) < \varepsilon$ implikuje konečnost $S(f, D)$ a $s(F, D)$.

Úloha 2.1.30. $x_{u_i}, x_{v_i} \in [a_i, a'_i]$.

Úloha 2.1.31. $[x_j, x_{j+1}]$ je pokrytý jediným $[a_i, a'_i]$.

Úloha ??. Dvě nerovnosti na začátku důkazu se obrátí.

Literatura

[1] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis. Second edition*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[2] I. Černý, *Úvod do inteligentního kalkulu: 1000 příkladů z elementární analýzy*, Academia, Praha, 2002.

[3] D. Hilbert, Über das Unendliche, *Math. Ann.* **95** (1926), 161–190.

[4] V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha, 1984 (5. vydání, 1. vydání v r. 1948).

[5] M. Klazar, *Matematická analýza I*, předběžná verze, 2019.

[6] P. Y. Lee and R. Výborný, *Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[7] MacTutor History of Mathematics archive, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html` (vytvořeno Johnem J. O'Connorem a Edmundem F. Robertsonem).

[8] J. Mařík, Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech. I, II a II, *Časopis pro pěstování matematiky* **77** (1952), 1–51, 125–145 a 257–301.

[9] J. Mařík, A note on integration of rational functions, *Math. Bohem.* **116** (1991), 405–411.

[10] J. Mařík, Integration of some very elementary functions, *Math. Bohem.* **118** (1993), 201–217.

[11] R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London, 2004.

[12] I. Pinelis, An alternative to the Euler–Maclaurin summation formula: approximating sums by integrals only, *Numer. Math.* **140** (2018), 755–790.

[13] D. Preiss and M. Tartaglia, On characterizing derivatives, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 2417–2420.

[14] M. Rosenlicht, Integration in finite terms, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 963–972.

[15] Š. Schwabik, On non-absolutely convergent integrals, *Math. Bohem.* **121** (1996), 363–383.

[16] Š. Schwabik, *Integrace v $\mathbb{R}$ (Kurzweilova teorie)*, Univerzita Karlova v Praze - nakladatelství Karolinum, Praha, 1999.

[17] Š. Schwabik a P. Šarmanová, *Malý průvodce teorií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996.

[18] A. Torchinski, The change of variable formula in the Riemann–Stieltjes integral, arXiv:1904.07447v1, 2019, 17 stran.

[19] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele. První díl*, Matfyzpress, Praha, 2001.

[20] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele. Druhý díl*, Matfyzpress, Praha, 2009.

[21] K. S. Williams, *Number Theory in the Spirit of Liouville*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[22] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, Berlin, 2004.

[23] Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page`

Rejstřík