12. přednáška 6. ledna 2010

Metrický prostor C, derivace. Máme $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, komplexní čísla tvoří dvourozměrný euklidovský prostor (který je navíc vybavený násobením). Víme tedy, co jsou otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbf{C}$ a co jsou spojité funkce $f: X \to \mathbf{C}$, kde $X \subset \mathbf{C}$ je otevřená. Metrický prostor $\mathbf{C}$ je úplný a $X \subset \mathbf{C}$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Připomeňme, že vzdálenost komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$ je

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Stejně jako pro reálné funkce i pro funkce komplexní hraje důležitou roli derivace. Definice a metody výpočtu se oproti reálnému případu nijak nemění. Nechť $f: X \to \mathbf{C}$, kde $X \subset \mathbf{C}$ je otevřená, a $z_0 \in X$. Řekneme, že f *má v bodě* z_0 *derivaci*, když existuje limita $L \in \mathbf{C}$,

$$L = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

to jest

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ z \in \mathbf{C},\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L \right| < \varepsilon.$$

Derivaci opět označujeme $f'(z_0) = L$. Na rozdíl od reálného případu její nevlastní hodnoty neuvažujeme, vždy požadujeme $f'(z_0) \in \mathbf{C}$. Jako v reálném případu i pro komplexní funkce f, g a konstanty $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ máme vztahy

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g',\ (fg)' = f'g + fg',\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},\ (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Má-li f v bodě z_0 derivaci, dá se v jeho okolí lineárně aproximovat:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0),\ z \to z_0.$$

Speciálně je f spojitá v z_0.

Definice. Nechť $z_0 \in X \subset \mathbf{C}$, X otevřená, a $f: X \to \mathbf{C}$. Má-li f v z_0 derivaci, řekneme, že funkce f je *holomorfní v bodě* z_0. Má-li f derivaci v každém bodě množiny X, řekneme, že f je *holomorfní na množině* X. *Celá* či *celistvá* funkce je funkce holomorfní na celém $\mathbf{C}$.

Funkce holomorfní na X je na X pochopitelně spojitá. Příkladem holomorfní funkce je polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, jenž je celou funkcí. Jiným příkladem je racionální funkce $r(z) = p(z)/q(z)$ (podíl dvou polynomů), jež je holomorfní na množině $\mathbf{C} \backslash R$, kde R je množina kořenů polynomu $q(z)$.

Derivace komplexní funkce v daném bodě je definována formálně stejně jako pro funkci reálnou, ale v komplexním případě její existence znamená pro funkci daleko větší omezení a nároky než v reálném případě. V komplexním případě se totiž chce, aby limita výrazu $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$ existovala a byla táž pro všechny možné směry, jimiž se v komplexní rovině může z blížit k z_0, kdežto v reálném případě se z k z_0 blíží pouze po reálné ose a má tedy na výběr jen dva směry—zleva nebo zprava. Vysvětlíme to podrobněji. Uvažme tuto situaci: $f:\ (-a,a)\to\mathbf{R}$, kde $a>0$, je reálná funkce definovaná na intervalu v okolí 0 a $g:\ D\to\mathbf{C}$ je komplexní funkce definovaná na otevřeném kruhu se středem v 0 a poloměrem a (tj. $D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<a\}$), která rozšiřuje f do komplexního oboru, takže $f(x)=g(x)$ pro každé $x\in(-a,a)$. Pro každé $z_0\in D$ pak můžeme počítat komplexní derivaci

$$g'(z_0)=\lim_{z\to z_0,z\in\mathbf{C}}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

a pokud je $z_0\in(-a,a)$ reálné, můžeme počítat navíc i reálnou derivaci

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0,z\in\mathbf{R}}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Základní věta komplexní analýzy praví (viz Věta 5, dokazovat ji na přednáškách nebudeme), že když má g pro každé $z_0\in D$ derivaci (tj. g je holomorfní na D), potom už g musí mít na D (komplexní) derivace všech řádů a v důsledku toho její reálné zúžení f má na intervalu $(-a,a)$ (reálné) derivace všech řádů. To nastává třeba pro reálnou exponenciálu a její komplexní rozšíření (definované pomocí mocniné řady, viz níže), které mají derivace všech řádů. Na druhou stranu je lehké definovat f tak, že na $(-a,a)$ má vlastní první (reálnou) derivaci, ale nikoli druhou. Třeba $f:\ (-a,a)\to\mathbf{R}$ definovaná jako $f(x)=0$ pro $-a<x\le 0$ a $f(x)=x^2$ pro $0<x<a$ má na $(-a,a)$ (reálnou) derivaci, $f'(x)=0$ pro $-a<x\le 0$ a $f'(x)=2x$ pro $0\le x<a$, ale v $x=0$ nemá druhou (reálnou) derivaci, protože $f''_-(0)=0$ a $f''_+(0)=2$. Díky zmíněné základní větě víme, že tuto f nelze vůbec žádným způsobem komplexně rozšířit na $g:\ D\to\mathbf{C}$ tak, aby g byla na D holomorfní. Třeba (naivní) rozšíření $g(z)=0$ pro $z\in D$ s $\mathrm{Re}(z)\le 0$ a $g(z)=z^2$ pro $z\in D$ s $\mathrm{Re}(z)>0$ nemá (komplexní) derivaci $g'(z_0)$ pro žádné nenulové $z_0=bi$, $-a<b<a$, protože v z_0 tato g není ani spojitá. Základní věta nám říká, že vůbec žádné holomorfní rozšíření neexistuje.

Špatná zpráva komplexní analýzy tak je, že existenci derivace lze zaručit mnohem obtížněji než pro reálné funkce. Přebíjí ji však dobrá zpráva: komplexní funkce, které už derivaci mají, tím automaticky získávají spoustu užitečných, podivuhodných a vpravdě neuvěřitelných vlastností (o nichž si bohužel v těchto třech přednáškách budeme moci říci jen málo).

Mocninné řady v komplexním oboru. Kromě racionálních funkcí v tomto okamžiku vlastně žádné jiné hezké (tj. holomorfní) komplexní funkce k dispozici nemáme. Mocným, a jak uvidíme fakticky jediným, nástrojem pro zavedení takových funkcí jsou mocninné řady. Připomeneme jejich vlastnosti, které jsou analogické vlastnostem nám už známým z reálného případu.

Mocninná řada s koeficienty a_n *a středem* z_0 je formální nekonečný součet

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde a_n a z_0 jsou daná komplexní čísla a z je (zatím formální) proměnná. Pokud M konverguje pro každé z z nějaké množiny $X \subset \mathbf{C}$, určuje funkci $f : X \to \mathbf{C}$, kde $f(z)$ pro $z \in X$ je odpovídající součet:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n).$$

M vždy konverguje pro $z = z_0$, kde $f(z_0) = a_0$.

Tvrzení 1 (o poloměru konvergence). *Nechť* $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *je mocninná řada a reálné číslo* $R \geq 0$*, respektive* $R = +\infty$*, je dáno vztahem*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

($1/0 = +\infty$ *a* $1/+\infty = 0$)*. Pak když* $z \in \mathbf{C}$ *a* $|z - z_0| < R$ *nebo* $z = z_0$*, mocninná řada* M *absolutně konverguje, a když* $|z - z_0| > R$*, mocninná řada* M *diverguje.*

Množinu $D(z_0, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < R\}$, což je otevřený kruh se středem v z_0 a poloměrem R, nazýváme *diskem konvergence mocninné řady* M. Pro $R = 0$ je disk konvergence prázdný a M konverguje pouze pro $z = z_0$. Pro $R = +\infty$ mocninná řada M konverguje pro každé $z \in \mathbf{C}$ a disk konvergence se rovná $\mathbf{C}$. Pro $0 < R < +\infty$ mocninná řada M konverguje na disku konvergence $D(z_0, R)$ a diverguje na vnitřku jeho doplňku, tj. na množině $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| > R\}$. O konvergenci na hraniční kružnici $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = R\}$ tvrzení neříká nic.

Tvrzení 2 (o stejnoměrné konvergenci). *Mocninná řada* M *se středem* z_0 *a poloměrem konvergence* $0 < R < +\infty$ *konverguje stejnoměrně na každém disku* $D(z_0, R - \delta)$ *pro* $\delta > 0$*. Pokud* $R = +\infty$*, konverguje* M *stejnoměrně na každém omezeném disku* $D(z_0, S)$ *pro* $0 < S < +\infty$*.*

Mocninná řada M tedy na svém disku konvergence definuje spojitou komplexní funkci $f : D(z_0, R) \to \mathbf{C}$. Pomocí stejnoměrné konvergence se dokáže následující tvrzení

Tvrzení 3 (o derivaci m. řady). *Nechť* $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *je mocninná řada a* $N = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n$ *je* M *formálně zderivovaná člen po členu. Mocninné řady* M *a* N *mají týž poloměr konvegence* R*. Pro* $R > 0$ *definují* M *a* N *na* $D(z_0, R)$ *po řadě funkce* f *a* g *splňující na* $D(z_0, R)$ *rovnost* $f' = g$*.*

Opakovaným použitím tohoto tvrzení plyne, že funkce zadaná mocninnou řadou je na disku konvergence holomorfní a má na něm derivace všech řádů.

Komplexní exponenciála. Nejdůležitější funkcí zadanou mocninnou řadou je funkce exponenciální:

$$\mathrm{e}^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Tato mocninná řada s koeficienty $a_n = 1/n!$ má $R = +\infty$, takže exponenciála je definovaná na celém $\mathbf{C}$ a je to celá funkce. Z mocninného rozvoje se lehce odvodí následující vlastnosti.

Tvrzení 4 (vlastnosti exponenciály). *Funkce* $\exp(z)$ *má tyto vlastnosti:*

1. *Pro každé* $z \in \mathbf{C}$ *je* $\exp(z)' = \exp(z)$*, exponenciála se rovná své derivaci.*
2. *Pro každé* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *je* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_1)$*, exponenciála převádí sčítání na násobení.*
3. *Pro každé* $z \in \mathbf{C}$ *je* $\exp(z) \neq 0$*.*
4. *Pro každé* $a \in \mathbf{R}$ *je* $\exp(ai) = \mathrm{cis}(a) = \cos(a) + i\sin(a)$*.*
5. *Pro každé* $z \in \mathbf{C}$ *je* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$*.*
6. *Pro každé nenulové* $u \in \mathbf{C}$ *má rovnice* $\exp(z) = u$ *nekonečně mnoho řešení* $z \in \mathbf{C}$*, která se vzájemně liší o celočíselné násobky čísla* $2\pi i$*.*

Speciálně řešení rovnice $\exp(z) = 1$ jsou právě čísla $2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$. Poslední vlastnost nejvíce odlišuje komplexní exponenciálu od její reálné verze, v níž má $\exp(z) = u$ právě jedno řešení pro $u > 0$ a žádné pro $u \leq 0$. S inverzní funkcí ke komplexní exponenciále, komplexním logaritmem, jsou proto problémy.

Analytické funkce. Jsou to funkce lokálně vyjádřitelné mocninnou řadou. Přesněji:

Definice. Nechť $z_0 \in X \subset \mathbf{C}$ s otevřenou X a $f : X \to \mathbf{C}$. Když existuje $r > 0$, že $D(z_0, r) \subset X$ a f se dá na disku $D(z_0, r)$ vyjádřit mocninnou řadou se středem v z_0, řekneme, že *f je analytická v okolí bodu z_0*. Když je f analytická v okolí každého bodu množiny X, řekneme, že *f je analytická na X*. Když se pro každé $z_0 \in X$ a každé takové $r > 0$, že $D(z_0, r) \subset X$, dá f vyjádřit na disku $D(z_0, r)$ mocninnou řadou se středem v z_0, řekneme, že *f je globálně analytická na X*.

Věta 5 (hlavní, holomorfnost je totéž co analytičnost). *Nechť* $X \subset \mathbf{C}$ *je otevřená a* $f : X \to \mathbf{C}$*. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Funkce f je na X holomorfní.*
2. *Funkce f je na X analytická.*
3. *Funkce f je na X globálně analytická.*

Implikace 3 $\Rightarrow$ 2 je triviální z definice, implikace 2 $\Rightarrow$ 1 plyne jednoduše z vlastností mocninných řad a je obsahem Tvrzení 3. Hluboká je implikace 1 $\Rightarrow$ 3, o jejímž důkazu si ani povšechně nic povědět nestačíme.

Podle této věty jsou pro komplexní funkce existence derivace na otevřené množině a (lokální) rozvinutelnost do mocninné řady totožné vlastnosti. Speciálně každá holomorfní funkce má nejenom první derivaci, ale derivace všech řádů. To je podstatný rozdíl proti reálnému případu, jak jsme už vysvětlili na příkladu po definici derivace. Tam uvedená reálná funkce $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ má na $(-a, a)$ první derivaci, ale nedá se v žádném okolí bodu 0 vyjádřit mocninnou řadou ani v reálném oboru (protože $f''(0)$ neexistuje).

Jednoznačnost koeficientů mocninné řady. Nechť je komplexní funkce f analytická v okolí bodu z_0, takže existuje $r > 0$ a mocninná řada $M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ s poloměrem konvergence alespoň r, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pro každé } z \in \mathbf{C} \text{ se } |z - z_0| < r.$$

Jsou koeficienty a_n určené jednoznačně? Neexistuje ještě jiná mocninná řada $N = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ s odlišnými koeficienty, která lokálně v okolí z_0 počítá funkci f? Odpověď je nikoli, protože koeficienty mocninné řady se jednoznačně vypočítají z hodnot funkce, kterou lokálně vyjadřuje, pomocí derivací:

$$b_n = a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Jinak řečeno, pokud $M(z) = N(z)$ platí (jako rovnost funkcí) pro každé z z nějakého okolí bodu z_0, potom se koeficienty nutně shodují, $a_n = b_n$ pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pokud předpoklad oslabíme a budeme předpokládat, že rovnost $M(z) = N(z)$ platí pro každé z z nějaké nekonečné množiny $X \subset \mathbf{C}$ (která nemusí být okolím z_0), bude stále nutně platit rovnost koeficientů $a_n = b_n$? Jak dobře známo, pokud M i N je polynom (mají jen konečně mnoho nenulových koeficientů), odpověď je ano, protože pro odlišné koeficienty by $M - N$ byl nenulový polynom s nekonečně mnoha kořeny. Jsou-li M a N obecné mocninné řady, zní odpověď ne, jak ukazuje tento příklad: Pro $(z_0 = 0)$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} 0z^n \quad \text{a} \quad N = \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

je $M(k\pi) = N(k\pi) = 0$ pro každé $k \in \mathbf{Z}$, i když koeficienty obou mocninných rad jsou odlišné. Z nekonečně mnoha hodnot mocninné řady jako funkce tedy obecně nelze zrekonstruovat její koeficienty. Nicméně to je možné, pokud množina argumentů má hromadný bod. Toto tvrzení pro jednoduchost dokážeme pro případ středu v počátku, zobecnění pro obecný střed je zřejmé. Beze změny platí i v reálném případě, kdy jsme si ho měli uvést, takže alespoň teď.

Tvrzení 6 (jednoznačnost koeficientů m. řady). *$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $N = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ buďte mocninné řady a (z_n) buď prostá posloupnost komplexních* *čísel konvergující k* 0*, která leží v disku konvergence* M *i* N*. Pokud pro každé* n *je* $M(z_n) = N(z_n)$*, potom pro každé* n *je* $a_n = b_n$*.*

Důkaz. Až příště. $\square$

Jednoduchý, ale důležitý příklad. Uvažme tyto dvě komplexní funkce, holomorfní na svých definičních oborech:

$$f:\ D(0,1) \to \mathbf{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{a} \quad g:\ \mathbf{C}\backslash\{1\} \to \mathbf{C},\ g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Díky vzorci pro součet geometrické řady víme, že $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in D(0,1)$. Funkce g je ale definovaná ne pouze na disku $D(0,1)$, ale na celém $\mathbf{C}$ s výjimkou jediného bodu 1. Holomorfně tedy rozšiřuje funkci danou mocninnou řadou $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ s poloměrem konvergence 1 i mimo disk konvergence, kromě špatného bodu $z = 1$. Jak je to pro obecnou mocninnou řadu? Má taky vždy takový „špatný“ bod, kam se nedá rozšířit? K čemu jsou tyto „špatné“ body vůbec dobré? Uvidíme příště.