Příklady na posloupnosti a řady funkcí 1

Připomeňte si z přednášky následující. Jak je definovaná bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí? Jaké jsou mezi nimi vztahy? Jaká je souvislost mezi stejnoměrnou konvergencí a supremovou metrikou? Jaká je obdoba Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci? Kdy z bodové či lokálně stejnoměrné konvergence plyne stejnoměrná konvergence? Kdy posloupnost spojitých funkcí konverguje ke spojité funkci? Kdy platí, že $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$?

Určete na jakých intervalech (či podmnožinách) definičních oborů konvergují bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně následující posloupnosti funkcí. Jaké jsou limitní funkce?

1. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, definiční obor je $[0,1]$.
3. $f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1}$, definiční obor je $[0,1]$.
4. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = nx(1-x)^n$, definiční obor je $[0,1]$.
6. $f_n(x) = \exp(-n^2x^2)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.

Uveďte příklad takové posloupnosti funkcí $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitých na $[0,1]$, že $f_n \to f$ na $[0,1]$, $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$ a f je na $[0,1]$ spojitá.

Nechť $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na M.

1. Ukažte, že $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.
2. Ukažte, že $f_n g_n \to fg$ na M, ale ne nutně $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na M.
3. Ukažte, že když jsou funkce f a g na M omezené, pak už $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na M.