Příklady probírané na 6. cvičení 11. 11. 2009

Ještě k souvislosti metrických prostorů.

- Příklad 5 z minulého cvičení, tj. rovinná množina tvořená uzávěrem grafu G funkce $\sin(1/x), 0 < x \leq 1$ (G plus úsečka U spojující body $(0,-1)$ a $(0,1)$), je souvislá ale ne obloukově souvislá. Souvislost: $G \cup U \subset \mathbb{R}^2$ je souvislá ze stejného důvodu, z jakého je souvislá třeba množina $A \cup B = (0,1] \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, totiž G a U jsou souvislé a U leží v uzávěru G. Oblouková souvislost: $G \cup U \subset \mathbb{R}^2$ není obloukově souvislá, protože žádný bod $u \in U$ nelze křivkou spojit s žádným bodem $g \in G$ (pro každé $\delta > 0$ by úsek grafu $f(x), 0 < x < \delta$, takové křivky $f : [0,1] \to G \cup U$, f spojité a $f(0) = u, f(1) = g$, musel obsahovat úsek grafu $\sin(1/x), 0 < x < \delta'$, pro nějaké $\delta' > 0$ a nekonečněkrát by tak kmital s rozkmitem 2, což je v rozporu se spojitostí f v bodě 0).

- Příklad 6 z minulého cvičení, tj. souvislá otevřená množina v euklidovském prostoru je již obloukově souvislá, podle návodu.

- Pomocí vlastností souvislosti ukažte, že euklidovské metrické prostory $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ a $[0,1] \subset \mathbb{R}$, respektive $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, nejsou homeomorfní. Návod: co se stane po vyhození jednoho bodu?

Úplnost. Rozhodněte o úplnosti následujících podprostorů.

1. $X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subset \mathbb{R}$
2. $X = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$
3. $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subset \mathbb{R}$
4. $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$
5. $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{Q}$