Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 9, 18. 4. 2024

# TAYLOROVY ROZVOJE. PRIMITIVNÍ FUNKCE

## Aproximace Taylorovým polynomem

• *Co je to polynom?* Ve 4. př. jsme polynomy definovali jako funkce, které vzniknou z konstant $c$ $(= k_c)$, $c \in \mathbb{R}$, a z identické funkce $x$ $(= \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ sčítáním a násobením.

**Věta 1 (kanonický tvar polynomu)** *Nechť $p$ $(\in \mathcal{F}(\mathbb{R}))$ je polynom. Pak buď $p = k_0$ (je to nulový polynom), anebo existují jednoznačné reálné koeficienty $c_0, \dots, c_k$ s $k \in \mathbb{N}_0$ a $c_k \neq 0$, že $p(x) = p = \sum_{j=0}^{k} k_{c_j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^j = \sum_{j=0}^{k} c_j x^j$ ($\deg p = k$ pak je stupeň polynomu $p$, $\deg k_0 = -\infty$).*

• *Taylorův polynom funkce.* Zobecníme lineární přiblížení $f(x) = f(b) + f'(b) \cdot (x - b) + o(x - b)$ $(x \to b)$, $b \in D(f)$.

**Definice 2 (Taylorův polynom)** *Pro $j = 0, \dots, n-1$ s $n \in \mathbb{N}$ nechť $f^{(j)}$ jsou v $\mathcal{F}(U(b, \delta))$ a existuje $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Polynom $T_n^{f,b}(x) = \sum_{j=0}^{n} \big(f^{(j)}(b)/j!\big) \cdot (x - b)^j =$*
$$= f(b) + f'(b)(x-b) + \tfrac{f''(b)}{2}(x-b)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$
*je Taylorův polynom funkce $f$ řádu $n$ se středem v $b$.*

Zmíněná lineární aproximace pak má následující zobecnění.

**Věta 3 (o T. polynomu)** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{F}(U(b, \delta))$ jsou jako výše. Potom $T_n^{f,b}(x)$ je jediný reálný polynom $p(x)$ stupně nejvýše $n$, že $f(x) = p(x) + o((x - b)^n)$ $(x \to b)$.*

Jinak řečeno, že $\lim_{x\to b}(f(x)-p(x))/(x-b)^n = 0$.

- *Úloha.* Pro $n \geq 2$ dokažte identitu $\big(T_n^{f,b}(x)\big)' = T_{n-1}^{f',b}(x)$.

**Lemma 4 (o polynomech)** *$b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg p \leq n$. Pak $\lim_{x\to b} p(x)/(x-b)^n = 0 \Rightarrow p(x) = k_0$.*

**Důkaz.** Indukcí podle $n$. Pro $n = 0$ to platí, $p(x) = a_0 = k_{a_0}$ a $\frac{a_0}{1} \to 0$ dává $a_0 = 0$. Nechť $n > 0$ a $\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0$. Pak $p(b) = \lim_{x\to b} p(x) = 0$. Tedy $b$ je kořenem $p(x)$ a $p(x) = (x-b)\cdot q(x)$, kde $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ má stupeň nejvýše $n-1$. Z $0 = \lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{(x-b)\cdot q(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$ indukcí plyne, že $q(x)$ je nulový polynom. To tedy je i $p(x)$. $\square$

**Důkaz věty 3.** Nejprve dokážeme indukcí podle $n$ platnost limity $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0$. Pro $n = 1$ se $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_1^{f,b}(x))}{x-b}$ rovná

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lim_{x\to b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0\,.$$

Nechť $n \geq 2$. Podle věty 8 v minulé přednášce (LHP2), identity v úloze a indukce (jaké přesně?) se $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n}$ rovná

$$\lim_{x\to b} \frac{(f(x)-T_n^{f,b}(x))'}{((x-b)^n)'} = \frac{1}{n} \lim_{x\to b} \frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0\,.$$

Nechť $p \in \mathbb{R}[x]$ má $\deg p \leq n$ a splňuje, že $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-p(x)}{(x-b)^n} = 0$. Pak ale $\lim_{x\to b} \frac{p(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n}$ rovná

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0 + 0 = 0\,.$$

Podle lemmatu 4 se $p(x) = T_n^{f,b}(x)$. $\square$

## Taylorovy polynomy některých elementárních funkcí

Odteď je střed T. polynomu v $b = 0$ (neřekneme-li jinak) a $n \in \mathbb{N}$.

**Tvrzení 5** ($\mathrm{e}^x$**,** $\sin x$ **a** $\cos x$**)** *Tyto tři funkce mají po řadě T. polynomy* $\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$, $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ *a* $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$.

**Důkaz.** Plyne to z jejich definic řadami ve 4. př. a z věty 3. $\square$

Pro $a \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N}$ binomický koeficient $\binom{a}{j}$ je $\frac{a(a-1)\dots(a-j+1)}{j!}$. Definujeme $\binom{a}{0} = 1$.

**Tvrzení 6** ($(1+x)^a$**)** *Taylorův polynom je* $\sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j$.

**Důkaz.** Na $(-1, 1)$ se pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a každé $a \in \mathbb{R}$

$$((1+x)^a)^{(j)} = a(a-1)\dots(a-j+1)(1+x)^{a-j} \ ,$$

s $((1+x)^a)^{(0)} = (1+x)^a$. Patrně $(1+0)^{a-j} = 1$. $\square$

**Tvrzení 7** ($\log(1+x)$ **a** $\log(1/(1-x))$**)** *Tyto funkce mají po řadě Taylorovy polynomy* $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j / j$ *a* $\sum_{j=1}^{n} x^j / j$.

**Důkaz.** Pro $\forall x \in (-1, 1)$ a $\forall j \in \mathbb{N}$ se $(\log(1+x))^{(j)}$ rovná

$$(-1)(-2)\dots(-j+1) \cdot (1+x)^{-j} = (-1)^{j+1}(j-1)! \cdot (1+x)^{-j}$$

a $(\log(1+x))^{(0)} = \log(1+x)$. Dále platí, že $\log(1+0) = 0$ a $(1+0)^{-j} = 1$. Dále $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1+(-x))$. $\square$

Taylorovy polynomy funkcí arcsin, arccos a arctan dostaneme pomocí následujícího obecného tvrzení.

**Tvrzení 8 (TP funkcí $f'$ a $f$)** *Nechť pro $j = 0, 1, \ldots, n$ s $n \in \mathbb{N}$ je $f^{(j)}$ v $\mathcal{F}(U(0, \delta))$ a existuje $f^{(n+1)}(0) \in \mathbb{R}$. Potom $f'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n)$ $(x \to 0) \Rightarrow$*
*$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} \cdot x^{j+1} + o(x^{n+1})$ $(x \to 0)$.*

**Důkaz.** Střed je 0. Podle věty 3 pro $j = 0, 1, \ldots, n$ je $a_j = f^{(j+1)}(0)/j!$. Podle téže věty je tedy koeficient u $x^{j+1}$ v T. polynomu funkce $f$ roven $f^{(j+1)}(0)/(j+1)! = a_j/(j+1)$. $\square$

**Důsledek 9 ($\arctan x$, $\arcsin x$ a $\arccos x$)** *Tyto tři funkce mají T. polynomy $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$, $\sum_{j=0}^{n} \binom{j-1/2}{j} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ a $\frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^{n} \binom{j-1/2}{j} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$.*

**Důkaz.** Na $(-1, 1)$ se $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$ (pomocí součtu geometrické řady s kvocientem $-x^2$). Podle tvrzení 8 dostáváme T. polynom arkus tangensu. Podobně pro arkus sinus a arkus kosinus s pomocí tvrzení 6, protože $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2}$. $\square$

- *Úloha.* Uveďte podrobnosti těchto tří výpočtů.

- *Výpočty limit Taylorovými polynomy.* Pomocí T. polynomu kosinu například máme, že $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{(\cos x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{(1 - x^2/2 + o(x^2) - 1)^2}$ se rovná $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4/4 + o(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1/4 + o(x^4)/x^4} = 4$.

## Taylorovy řady

Taylorova řada funkce prodlužuje její T. polynom do nekonečna.

**Definice 10 (Taylorovy řady)** *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ & $x$ je proměnná. Formální výraz* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$ *nazveme Taylorovou řadou funkce $f$ se středem $a$.*

Dosazením reálného čísla za $x$ dostaneme skutečnou řadu. T. polynomy jsou „částečné součty“ T. řad. Pro $n \in \mathbb{N}$ a funkci $f$, že $f^{(j)} \in \mathcal{F}(U(b,\delta))$ pro $j = 0,\dots,n-1$ a $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$, definujme zbytek $R_n^{f,b}$ Taylorova polynomu $T_n^{f,b}(x)$ jako

$$R_n^{f,b}(x) = f(x) - T_n^{f,b}(x) \ \ (\in \mathcal{F}(U(b,\delta)))\ .$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n = f(x) \iff \lim R_n^{f,b}(x) = 0$.

**Věta 11 (zbytky TP)** *Nechť $f^{(j)} \in \mathcal{F}(U(b,\delta))$ pro $j = 0,\dots,n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Platí následující.*
*Lagrangeův zbytek – pro každé $x \in P(b,\delta)$ existuje $c$ mezi $b$ a $x$, že $R_n^{f,b}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-b)^{n+1}$.*
*Cauchyův zbytek – pro každé $x \in P(b,\delta)$ existuje $c$ mezi $b$ a $x$, že $R_n^{f,b}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n(x-b)$.*

Důkaz je/bude v **K**. Pro všech devět funkcí nyní uvedeme, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou součtem své T. řady (se středem v 0). Podle definic ve 4. př. se $\mathrm{e}^x = \sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ a $\cos x = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

- *Úlohy.* Pomocí věty 11 dokažte následující.

Pro každé $x \in (-1,1)$ & $a \in \mathbb{R}$ se $(1+x)^a = \sum_{n\ge 0}\binom{a}{n}x^n$, $\log(1+x) = \sum_{n\ge 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}$, $\arctan x =$

$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\arcsin x = \sum_{n\geq 0}\binom{n-1/2}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ a $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0}\binom{n-1/2}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Některé z těchto rozvojů platí i obecněji.

- *Úloha.* Nechť $a \in \mathbb{N}_0$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $(1+x)^a$ součtem své T. řady?

Dá se dokázat, že rozvoj $\log(1+x)$ platí i pro $x = 1$, rozvoj $\log(1/(1-x))$ platí i pro $x = -1$, rozvoj $\arctan x$ platí i pro $x = 1$ a rozvoje $\arcsin x$ a $\arccos x$ platí i pro $x = \pm 1$.

Koeficienty v T. řadách mají často kombinatorický výklad. Nechť $s_n$ je počet střídavých permutací $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ – splňují nerovnosti $c_1 < c_2 > c_3 < c_4 > \ldots$ . Tedy $(s_n) = (1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, \ldots)$. Např. $s_4 = 5$ díky permutacím 1324, 1423, 2314, 2413 a 3412.

**Tvrzení 12 (o střídavých p.)** *Pro* $\forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *platí, že* $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_n/n!)x^n = \frac{1}{\cos x} + \tan x$.

## Primitivní funkce

- *Netriviální intervaly.* Interval $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální, pokud $I \neq \emptyset$ a $I \neq \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- *Úloha.* Interval $I$ je netriviální, právě když $I \neq \emptyset$ a $I \subset L(I)$.
- *Úmluva.* Není-li řečeno jinak, $I$ označuje netriviální interval.

**Definice 13 (primitivní funkce)** *Nechť* $F, f \in \mathcal{F}(I)$. *Pak* $F$ *je primitivní (funkce) k* $f$, *symbolicky* $F = \int f$, *pokud* $F' = f$. *Někdy také* $F$ *nazýváme antiderivací funkce* $f$.

$F = \int f$ tedy znamená, že pro každé $b \in M(F) = M(f) = I$ je $F'(b) = f(b)$.

• *Úloha.* Když $F = \int f$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ i $F + k_c = \int f$.

**Věta 14 (platí i opak)** *Nechť $F, G, f \in \mathcal{F}(I)$ a $F = \int f$ i $G = \int f$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že $F + k_c = G$.*

**Důkaz.** Nechť $F$, $G$, $f$ a $I$ jsou, jak uvedeno, a $a < b$ jsou v $I$. Podle Lagrangeovy VSH, použité pro funkci $G - F$ a interval $[a, b]$, existuje $c \in (a, b)$, že $\frac{(G-F)(b)-(G-F)(a)}{b-a}$ se rovná

$$(G - F)'(c) = G'(c) - F'(c) = f(c) - f(c) = 0\,.$$

Tedy $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$, takže $G(x) - F(x) = c$ a $G = F + k_c$ pro nějaké $c$ a každé $x \in I$. □

## Spojitá funkce má antiderivaci

Ve zbylé části přednášky dokážeme následující větu.

**Věta 15 (existence antiderivací)** *Pro každý netriviální interval $I$ má každá funkce $f \in \mathcal{C}(I)$ primitivní funkci $F$.*

• *Postup důkazu.* **(1)** Začneme funkcemi $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $a < b$, které aproximujeme lomenými čarami $g_n \in \mathcal{C}([a, b])$ ve vzdálenosti $\le \frac{1}{n}$ od $f$. **(2)** Ke každé $g_n$ najdeme primitivní funkci $G_n$. **(3)** Ukážeme, že pak $F = \lim G_n$ je primitivní k $f$. **(4)** Výsledek rozšíříme na $f \in \mathcal{C}(I)$ pro netriviální a nekompaktní intervaly $I$.

## Krok 1. Lomené čáry

Buď $a < b$, $I = [a, b]$ & $f \in \mathcal{C}(I)$. Pak $g \in \mathcal{C}(I)$ je <u>lomená čára</u>, existuje-li takové dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, intervalu $I$, že pro $\forall\, i \in [n]$ je zúžení $g \mid [a_{i-1}, a_i]$ lineární funkce $s_i x + b_i$.

**Tvrzení 16 (aproximace l. čarami)** $f \in \mathcal{C}(I)$. *<u>Pak</u> pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje taková lomená čára $g_n \in \mathcal{C}(I)$, že pro každé $x \in I$ je $|f(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{n}$.*

**Důkaz.** Podle věty 14 v 6. př. $f$ je stejnoměrně spojitá. Pro dané $n$ tedy existuje $\delta$, že $x, y \in I$, $|x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2n}$. Vezmeme libovolné dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$, $m \in \mathbb{N}$, intervalu $I$, kde pro každé $j \in [m]$ je $a_j - a_{j-1} \le \delta$. Pro každé $j \in [m]$ vezmeme přímku $y = s_j x + b_j$ jdoucí body $(a_{j-1}, f(a_{j-1}))$ a $(a_j, f(a_j))$ a pro $x \in [a_{j-1}, a_j]$ definujeme $g_n(x) = s_j x + b_j$.

Nechť $x \in I$ je libovolné. Vezmeme $j \in [m]$, že $x \in [a_{j-1}, a_j]$. Pak $|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - (s_j x + b_j)|$ je nejvýše

$$|f(x) - f(a_j)| + |s_j a_j + b_j - (s_j x + b_j)| \le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\,.$$

□

## Krok 2. Antiderivace lomených čar

Dokážeme, že každá lomená čára má primitivní funkci.

**Tvrzení 17 (antiderivace l. čar)** *Nechť $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, je dělení intervalu $I = [a, b]$ a $g \in \mathcal{C}(I)$ je lomená čára daná na tomto dělení lineárními funkcemi $s_i x + b_i$, $i \in [n]$. <u>Pak</u> existují konstanty $c_i$, $i \in [n]$, že funkce $G \in \mathcal{C}(I)$, daná na dělení kvadratickými funkcemi $h_i(x) = s_i x^2/2 + b_i x + c_i$, $i \in [n]$, je primitivní ke $g$ a $G(a) = 0$.*

**Důkaz.** Zřejmě $h_i'(x) = (s_i x^2/2 + b_i x + c_i)' = s_i x + b_i$ na každém $[a_{i-1}, a_i]$, $i \in [n]$. První konstantu $c_1$ zvolíme tak, že $h_1(a) = 0$. Když už je $c_k$, $k < n$, zvolená, následující konstantu $c_{k+1}$ zvolíme tak, že $h_k(a_k) = h_{k+1}(a_k)$. Funkci $G(x) \in \mathcal{C}(I)$ pak definujeme na každém intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ jako $h_i(x)$. Je jasné, že $G'(x) = g(x)$ pro každé $x \in I$, $x \neq a_i$ s $0 < i < n$. Ale i pro $i \in \mathbb{N}$ s $i < n$ je $G'(a_i) = g(a_i)$, protože $G'_-(a_i) = G'_+(a_i) = g(a_i)$. Takže $G$ je primitivní ke $g$ a $G(a) = 0$. $\square$

## Krok 3. Výměna pořadí limity funkcí a derivace

Tento krok důkazu věty 15 je nejsložitější.

• *Stejnoměrná konvergence.* Nechť máme $f, f_n \in \mathcal{F}(M)$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud pro každé $x \in M$ se $\lim f_n(x) = f(x)$, píšeme $f_n \to f$ (na $M$) a řekneme, že (na $M$) funkce $f_n$ <u>bodově konvergují</u> k $f$. Pokud pro každé $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $n \geq n_0$ a $x \in M \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, píšeme $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$) a řekneme, že (na $M$) funkce $f_n$ <u>stejnoměrně konvergují</u> k $f$. Bodová i stejnoměrná limita je jednoznačná.

• *Stejnoměrná cauchyovost.* Pro $f_n \in \mathcal{F}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, je $(f_n)$ (na $M$) <u>stejnoměrně Cauchyova</u>, pokud pro každé $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $m, n \geq n_0$ a $x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

• *Úloha.* Posloupnost $(f_n)$ ($\subset \mathcal{F}(M)$) je stejnoměrně Cauchyova, právě když existuje $f \in \mathcal{F}(M)$, že $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$).

• *Moore–Osgoodova věta.* Je to věta o výměně pořadí limit.

**Věta 18 (MOV)** *$f_n, f \in \mathcal{F}(M)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$), $A \in L(M)$ a pro $\forall n$ existuje $a_n = \lim_{x \to A} f_n(x) \in \mathbb{R}$. <u>Potom</u> existují následující shodné vlastní limity*

$$\lim a_n = \lim_{x \to A} f(x)\,. \text{ Takže } \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to A} f_n(x) = \lim_{x \to A} \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,.$$

**Důkaz.** Díky $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$) je $(f_n)$ stejnoměrně Cauchyova: pro každé $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $x \in M$ a $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Pro každé dva indexy $m, n \geq n_0$ pak limitní přechod $\lim_{x \to A}$ dává nerovnost $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Tedy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova a má limitu $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí odhad

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - a|}_{V_3}\ .$$

Buď dáno $\varepsilon$. Protože $\lim a_n = a$, existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow V_3 \leq \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$), existuje $n_1$, že $n \geq n_1$ a $x \in M$ $\Rightarrow V_1 \leq \varepsilon/3$. Vezmeme index $m \geq n_0, n_1$. Protože $\lim_{x \to A} f_m(x) = a_m$, můžeme vzít $\delta$, že pro $n = m$ a $x \in P(A, \delta) \cap M$ je $V_2 \leq \varepsilon/3$. Pro $n = m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$ tak je $|f(x) - a| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Takže $\lim_{x \to A} f(x) = a = \lim a_n$. □

*Robert Lee Moore (1882–1974)* a *William Fogg Osgood (1864–1943)* byli američtí matematici.

- *Výměna pořadí derivace a limity.* $I$ je lib. netriviální interval.

**Věta 19 (derivace a limita)** *Nechť funkce $f_n, f \in \mathcal{F}(I)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a platí tři následující podmínky.*
(1) *Pro každé $n$ se $D(f_n) = I$.*
(2) *$f_n' \rightrightarrows f$ (na $I$).*
(3) *Existuje $a \in I$, že posloupnost $(f_n(a))$ ($\subset \mathbb{R}$) konverguje.*
*Pak existuje $F \in \mathcal{F}(I)$, že $f_n \to F$ (na $I$) a $F' = f$. Tedy*

$$(\lim_{n \to \infty} f_n)' = \lim_{n \to \infty} f_n'\,.$$

**Důkaz.** Nechť $I$, $f_n$, $f$ a $a \in I$ jsou, jak uvedeno, a $b \in I$ je libovolný bod. Ukážeme, že $(f_n(b)) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova. Pro $b = a$

to platí podle podmínky 3. Nechť $a < b$, případ $b < a$ se řeší podobně. Nechť je dáno $\varepsilon$. Z podmínek 2 a 3 plyne, že existuje $n_0$, že $x \in I$ a $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f'_m(x) - f'_n(x)| \leq \varepsilon$ a také $m, n \geq n_0$ $\Rightarrow |f_m(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$. Vezmeme dva libovolné indexy $m, n \geq n_0$ a na funkci $f_m - f_n$ a interval $[a, b]$ použijeme Lagrangeovu VSH. Tím pro nějaké číslo $c \in (a, b)$ dostaneme rovnost

$$\frac{(f_m - f_n)(b) - (f_m - f_n)(a)}{b - a} = (f_m - f_n)'(c)\,.$$

Tedy máme odhad

$$\begin{aligned} |f_m(b) - f_n(b)| &\leq |b - a| \cdot |f'_m(c) - f'_n(c)| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &\leq (b - a)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1) \end{aligned}$$

a $(f_n(b))$ je Cauchyova. Je tedy konvergentní a pro každé $b \in I$ můžeme definovat

$$F(b) = \lim f_n(b) \in \mathbb{R}\,.$$

Získali jsme funkci $F \in \mathcal{F}(I)$, že $f_n \to F$ (na $I$).

Dokážeme, že $F' = f$. Použijeme předešlou M.–O. větu a pak ověříme splnění jejích předpokladů. Pro libovolné $b \in I$ se

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{x \to b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \to b} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \\ &\overset{\text{věta 18}}{=} \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = \lim_{n \to \infty} f'_n(b) = f(b)\,. \end{aligned}$$

Větu 18 jsme použili pro posloupnost funkcí

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \in \mathcal{F}(I \setminus \{b\})\,.$$

Jistě pro každé $n$ se $\lim_{x \to b} g_n(x) = f'_n(b)$ a také $\lim f'_n(b) = f(b)$. Zbývá ověřit, že pro funkci

$$g(x) = \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \in \mathcal{F}(I \setminus \{b\})$$

máme $g_n \rightrightarrows g$ (na $I \setminus \{b\}$). Jak víme, stačí dokázat, že posloupnost $(g_n(x))$ je stejnoměrně Cauchyova. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a $x \in I \setminus \{b\}$ platí, že $|g_m(x) - g_n(x)| =$

$$\frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(b) - f_n(b))|}{|x - b|} \overset{\text{Lagrangeova VSH}}{=}$$

$$\frac{\cancel{|x - b|} \cdot |f'_m(c) - f'_n(c)|}{\cancel{|x - b|}} = \underbrace{|f'_m(c) - f'_n(c)|}_{V}, \ c \text{ leží mezi } b \text{ a } x \ .$$

Podle podmínky 2 pro dané $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $m, n \geq n_0$ a $c \in I$ $\Rightarrow V \leq \varepsilon$. Posloupnost $(g_n(x))$ je tedy stejnoměrně Cauchyova v $x \in I \setminus \{b\}$ a důkaz je hotový. $\square$

Pro danou $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tak posloupnost funkcí $(G_n) = (\int g_n)$ ($\subset \mathcal{C}([a, b])$) sestrojená ve druhém kroku bodově konverguje k funkci $F$ primitivní k $f$. Podmínka 3 platí, protože $(G_n(a)) = (0, 0, \dots)$.

### Krok 4. Rozšíření na nekompaktní intervaly

Nechť $f \in \mathcal{C}(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval. Pokud $I$ není kompaktní, dá se vyjádřit jako sjednocení $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ do sebe vnořených kompaktních netriviálních intervalů $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_2 = [a_2, b_2] \subset \dots$ (viz úloha níže). Podle předchozího postupu vezmeme $F_n = \int f \mid I_n$. Podle věty 14 pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konstanta $c_n \in \mathbb{R}$, že $F_{n+1} \mid I_n + k_{c_n} = F_n$. S $c_0 = 0$ definujeme

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n + k_{c_0} + k_{c_1} + \cdots + k_{c_{n-1}}) \, .$$

Patrně $F = \int f$. Důkaz věty 15 je u konce. $\square$

• *Úloha.* Vyjádřete nekompaktní interval jako sjednocení do sebe vnořených intervalů $[a_n, b_n]$, $a_n < b_n$ a $n \in \mathbb{N}$.

Větu 15 dokážeme později znovu (a mnohem jednodušeji) pomocí Riemannova integrálu.

• *Úloha.* Modifikujte předešlý důkaz věty 15 tak, že čtvrtý krok se zahrne do prvního: pro každý netriviální interval $I$, každou $f \in \mathcal{C}(f)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje po částech lineární funkce $g \in \mathcal{C}(f)$, že pro každé $x \in I$ je $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n}$.

DĚKUJI ZA POZORNOST!