Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 3, 7. 3. 2024

ARITMETIKA LIMIT. LIMINF A LIMSUP. ŘADY

Minule jsme se zabývali existencí limit. Dnes prozkoumáme jejich vztahy k aritmetickým operacím a k lineárnímu uspořádání na rozšířené reálné ose $\mathbb{R}^*$. Zavedeme veličiny $\liminf$ a $\limsup$ přiřazené posloupnostem. Závěrem definujeme nekonečné řady a jejich součty. Reálné posloupnosti označujeme jako (a_n), (b_n) a (c_n). Připomeňte si počítání s nekonečny.

- *Úloha.* Dokažte obměny trojúhelníkové nerovnosti, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$|a+b| \geq |a| - |b| \text{ i } |a-b| \geq |a| - |b|\ .$$

Aritmetika limit posloupností

Limita součtu, součinu a podílu dvou posloupností se po řadě rovná součtu, součinu a podílu jejich limit. V důkazu si procvičíme práci s nerovnostmi v $\mathbb{R}$ a s aritmetikou v $\mathbb{R}^*$.

Věta 1 (aritmetika limit) *Buď $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$. Pak $\lim(a_n + b_n) = K + L$, $\lim(a_n b_n) = KL$ a $\lim(a_n/b_n) = K/L$, když výraz napravo není neurčitý.*

Důkaz. 1. Součet. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Pro každé velké n máme $|a_n - K| \leq \varepsilon/2$ a $|b_n - L| \leq \varepsilon/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato n

$$|(a_n + b_n) - (K + L)| \leq |a_n - K| + |b_n - L| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a $a_n + b_n \to K + L$.

Nechť $K = L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n mají a_n a b_n znaménko jako K a $|a_n|, |b_n| \geq 1/2\varepsilon$. Pro tato n tedy $a_n + b_n$ má znaménko jako K, $|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n| \geq 1/2\varepsilon + 1/2\varepsilon = 1/\varepsilon$ a $a_n + b_n \to K + L = K = L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \geq 1/\varepsilon + |L| + 1$ a $|b_n - L| \leq 1$, tedy $|b_n| \leq |L| + 1$. Pro tato n má $a_n + b_n$ znaménko jako K a, podle úlohy, $|a_n + b_n| \geq |a_n| - |b_n| \geq 1/\varepsilon + |L| + 1 - |L| - 1 = 1/\varepsilon$, tudíž $a_n + b_n \to K + L = K$. Případy $K \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita sčítání.

2. Součin. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon \leq 1$. Pro každé velké n máme $|a_n - K| \leq \varepsilon/(2|L| + 1)$, tedy $|a_n| \leq |K| + 1$, a $|b_n - L| \leq \varepsilon/(2|K| + 2)$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato n

$$\begin{aligned} |a_n b_n - KL| &\leq |a_n| \cdot |b_n - L| + |L| \cdot |a_n - K| \\ &\leq (|K| + 1) \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|K|+2} + |L| \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|L|+1} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, b_n jako L a $|a_n|, |b_n| \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Pro tato n má tedy $a_n b_n$ znaménko jako KL, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \geq 1/\sqrt{\varepsilon} \cdot 1/\sqrt{\varepsilon} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \geq 2/(\varepsilon|L|)$ a $|b_n - L| \leq |L|/2$, tedy $|b_n| \geq |L|/2$. Pro tato n tedy $a_n b_n$ má znaménko jako KL, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \geq \frac{2}{\varepsilon|L|} \cdot \frac{|L|}{2} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$. Případy $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita násobení.

3. Podíl. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno ε. Pro velké n je $|a_n - K| \leq \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|L| + 1)\})$

a $|b_n - L| \le \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|K|+1), |L|/2\})$, tedy $|a_n| \le |K|+1$, $|b_n| \le |L|+1$ a $|b_n| \ge |L|/2$. Podle Δ-ové nerovnosti je pro tato n $\big|a_n/b_n - K/L\big| = \big|(a_nL - b_nK)/b_nL\big|$

$$\le \frac{|a_n|\cdot|L-b_n| + |b_n|\cdot|a_n-K|}{|b_n|\cdot|L|} \le \frac{\varepsilon L^2/4 + \varepsilon L^2/4}{L^2/2} = \varepsilon$$

a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \ge |L|/2\varepsilon$ a $|b_n - L| \le |L|/2$, tedy $|b_n| \ge |L|/2$. Pro tato n tedy a_n/b_n má znaménko jako K/L, $|a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \ge \frac{|L|}{2\varepsilon}/(|L|/2)) = 1/\varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n je $|a_n - K| \le 1$, tedy $|a_n| \le |K|+1$, a $|b_n| \ge (|K|+1)/\varepsilon$. Pro tato n tedy $|a_n/b_n - 0| = |a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \le (|K|+1)/((|K|+1)/\varepsilon) = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L = 0$. $\square$

Když $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ a K/L není neurčitý výraz, pak $L \ne 0$. Konečně mnoho indexů n, kdy $b_n = 0$ a zlomek a_n/b_n není definovaný, pak ignorujeme či pro ně a_n/b_n libovolně dodefinujeme. I když (a_n) nebo (b_n) nemá limitu nebo $K+L$, KL či K/L je neurčitý výraz, výsledná jednoznačná limita stále může existovat. Zde je pár příkladů.

- *Úlohy (první dodatek k* AL*).* Dokažte následující.

  1. (a_n) je omezená a $\lim b_n = \pm\infty =: L \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = L$.
  2. (a_n) je omezená a $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim\, a_nb_n = 0$.
  3. $a_n > c > 0$ pro $n \ge n_0$ a $\lim\, b_n = \pm\infty =: L \Rightarrow \lim\, a_nb_n = L$. Podobně $a_n < c < 0 \ldots$.

4. (a_n) je omezená a $\lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim a_n/b_n = 0$.

5. $a_n > c > 0$ a $b_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a $\lim b_n = 0 \Rightarrow \lim a_n/b_n = +\infty$. Podobně $a_n < c < 0$ a $b_n > 0 \dots$.

6. $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$.

Neurčité výrazy limitu jednoznačně neurčují.

• *Úlohy (druhý dodatek k* AL*).* Dokažte, že pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ existují reálné posloupnosti (a_n) a (b_n), pro něž platí následující.

1. $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ a $\lim(a_n + b_n) = A$.

2. $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n = A$.

3. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim a_n/b_n = A$.

4. $\lim a_n = \pm\infty$, $\lim b_n = \pm\infty$ a $\lim a_n/b_n = A$.

Limity rekurentních posloupností

Jejich výpočet vysvětlíme příkladem v důkazu následujícího tvrzení.

• *Úloha (*AG *nerovnost).* Jde o nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Pro každá dvě reálná čísla $a, b \geq 0$ je $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Tvrzení 2 (rekurentní limita) *$(a_n) \subset \mathbb{Q}$ buď dána jako $a_1 = 1$ a pro $n \geq 2$ jako $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$. Pak $\lim a_n = \sqrt{2}$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, takže podle důsledku 10 v minulé přednášce (a_n) konverguje. Patrně je vždy $a_n > 0$, takže definice a_n je korektní. Pro $n \geq 2$ je podle AG nerovnosti $a_n = a_{n-1}/2 + 1/a_{n-1} \geq 2\sqrt{(a_{n-1}/2)/a_{n-1}} = \sqrt{2}$. Pro

$n \geq 3$ pak $a_{n-1} \geq a_n$, právě když $a_{n-1}/2 \geq 1/a_{n-1}$, to jest právě když $a_{n-1} \geq \sqrt{2}$, což platí. Nechť $a = \lim a_n \geq \sqrt{2}$. Podle AL a limit podposloupností je

$$a = \lim a_n = \frac{\lim a_{n-1}}{2} + \frac{1}{\lim a_{n-1}} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\ .$$

Tedy $a/2 = 1/a$, $a^2 = 2$ a $a = \sqrt{2}$. □

Je třeba vždy dokázat existenci limity. Například rekurentní posloupnost (a_n), daná jako $a_1 = 1$ a $a_n = -a_{n-1}$, nemá limitu $\lim a_n = 0$, přestože rovnice $L = -L$ má v $\mathbb{R}^*$ jediné řešení $L = 0$. Limita této posloupnosti $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ neexistuje.

Geometrické posloupnosti

Jsou to posloupnosti mocnin q^n.

> **Tvrzení 3 (limity geom. posl.)** *Nechť je $q \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{n\to\infty} q^n$ je 0 pro $|q| < 1$, 1 pro $q = 1$, $+\infty$ pro $q > 1$ a neexistuje pro $q \leq -1$.*

Důkaz. Nechť $|q| < 1$. Protože $|q^n| = |q|^n$, podle části 6 prvního dodatku k AL lze navíc předpokládat, že $q \in [0, 1)$. Potom (q^n) neroste a je zdola omezená. Podle věty 9 v minulé přednášce má nezápornou vlastní limitu L. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$, platí rovnice $L = q \cdot L$. Tedy $L = 0/(1 - q) = 0$. Pro $q = 1$ máme limitu 1 konstantní posloupnosti $(1, 1, \dots)$. Nechť $q > 1$. Podle první části tohoto tvrzení a části 5 prvního dodatku k AL je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{\lim 1}{\lim (1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty\ .$$

Nechť $q \leq -1$. Jak víme, pro $q = -1$ nemá posloupnost $(q^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ limitu. Podobně nemá limitu ani pro $q < -1$, protože podle třetí části tohoto tvrzení a aritmetiky limit má podposloupnosti s limitami $+\infty$ a $-\infty$. $\square$

Limity posloupností a LU $(\mathbb{R}^*, <)$

Jejich vztahy popisují dvě následující věty. Nejdřív ale zesílíme jednu vlastnost okolí.

- *Úloha.* Když $A < B$, pak existuje ε, že $U(A,\varepsilon) < U(B,\varepsilon)$ – platí, že $x \in U(A,\varepsilon) \wedge y \in U(B,\varepsilon) \Rightarrow x < y$.

> **Věta 4 (limita a uspořádání)** *Mějme* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *s* $\lim a_n = K$ *a* $\lim b_n = L$. *Potom platí následující.*
> (1) *Když $K < L$, tak existuje n_0, že pro každé dva, ne nutně stejné, indexy $m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$.*
> (2) *Když pro každé n_0 existují indexy m a n, že $m, n \geq n_0$ & $a_m \geq b_n$, pak $K \geq L$.*

Důkaz. 1. Nechť $K < L$. Podle úlohy existuje ε, že $U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Podle definice limity máme n_0, že $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m$ je v $U(K,\varepsilon)$ a b_n v $U(L,\varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$.

2. Podle logiky je implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ totéž, jako její obměna $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. Obměna implikace v části 1 je ale právě část 2. $\square$

Ostré nerovnosti mezi členy dvou posloupností mohou v limitě přejít v rovnost limit. Například pro $(a_n) = (1/n)$ a $(b_n) = (0, 0, \dots)$ je $a_m > b_n$ pro každé m a n, ale

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \, .$$

Předešlá věta se skoro vždy uvádí ve slabší podobě: když $K < L$, pak existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b_n$. Podobně pro část 2. Jistě dokážete větu zesílit ještě víc.

• *Úlohy.* Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) s $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ a $K < L$ existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $c, d \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $a_m < c < d < b_n$. Obměnou této implikace zesilte část 2 předchozí věty.

Nechť $I(a, b)$ označuje uzavřený a omezený interval s konci a a b,

$$I(a, b) = [a, b] \text{ pro } a \leq b \text{ a } I(a, b) = [b, a] \text{ pro } a \geq b\ .$$

$M \subset \mathbb{R}$ je <u>konvexní</u>, když pro každé $a, b \in M$ je $I(a, b) \subset M$.

Tvrzení 5 (o intervalech) *Konvexní množiny reálných čísel jsou právě $\emptyset$, singletony $\{a\}$ pro $a \in \mathbb{R}$, celé $\mathbb{R}$ a pro reálná čísla $a < b$ intervaly (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$ & $[a, +\infty)$.*

Důkaz. Z tranzitivity $<$ plyne, že všechny uvedené množiny jsou konvexní. Ukážeme, že jiné konvexní reálné množiny neexistují. Nechť $X \subset \mathbb{R}$ s $X \neq \emptyset, \mathbb{R}, \{a\}$ je konvexní množina a $a \in \mathbb{R} \setminus X$. Z konvexity X plyne, že $a \in H(X)$ (horní meze množiny X) nebo $a \in D(X)$ (dolní meze množiny X). Probereme pouze první případ, druhý se na něj převede otočením nerovností.

Nechť tedy $H(X) \neq \emptyset$. Položíme $b = \sup(X)$. Nechť $D(X) = \emptyset$. Pokud $b \in X$, pak $X = (-\infty, b]$. Pokud $b \notin X$, pak $X = (-\infty, b)$. Nechť $D(X) \neq \emptyset$. Pak položíme $c = \inf(X)$, patrně $c < b$. Pokud $b \notin X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b)$. Pokud $b \notin X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b)$. Pokud $b \in X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b]$. Konečně pokud $b \in X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b]$. $\square$

Každé okolí $U(A, \varepsilon)$ je zřejmě konvexní, protože je interval.

Věta 6 (o dvou strážnících) *Když pro každé velké n je $c_n \in I(a_n, b_n)$ a když $\lim a_n = \lim b_n = a$, pak i $\lim c_n = a$.*

Důkaz. Nechť posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Pak pro každé velké n je $a_n, b_n \in U(a, \varepsilon)$. Díky konvexitě $U(a, \varepsilon)$ pro každé velké n je $c_n \in I(a_n, b_n) \subset U(a, \varepsilon)$ a $c_n \to a$. $\square$

Dva strážníci, posloupnosti (a_n) a (b_n), tak mezi sebou vedou podezřelou posloupnost (c_n) ke společné limitě a.

- *Úloha.* Pro nevlastní limitu $A = \pm\infty$ stačí jeden strážník.

Limes inferior a limes superior posloupnosti

Latinsky to po řadě znamená „nejmenší limita“ a „největší limita“.

Definice 7 (hromadné body) *$A \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti (a_n), pokud $A = \lim b_n$ pro nějakou podposloupnost $(b_n) \preceq (a_n)$. Symbol $H(a_n)$ $(\subset \mathbb{R}^*)$ označuje množinu hromadných bodů posloupnosti (a_n).*

Například $(a_n) = (n - 1 + (-1)^n n + 1/n)$ má $H(a_n) = \{-1, +\infty\}$.

Definice 8 (liminf a limsup) *Pro každou $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Minimum a maximum se zde bere v $(\mathbb{R}^*, <)$.*

Hned dokážeme, že liminf a limsup vždy existují.

Věta 9 (liminf a limsup existují) *Pro každou $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je $H(a_n) \neq \emptyset$. Množina $H(a_n)$ má v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ minimum i maximum.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Jak víme z minula, (a_n) má podposloupnost s limitou, takže $H(a_n) \neq \emptyset$. Dokážeme existenci $\max(H(a_n))$, pro minimum se argumentuje podobně. Nechť $A = \sup(H(a_n))$, bráno v $(\mathbb{R}^*, <)$ (víme, že tam suprema vždy existují). Dokážeme, že $A \in H(a_n)$. Když $A = -\infty$, je $H(a_n) = \{-\infty\}$ a jsme hotovi, $A \in H(a_n)$.

Nechť $A > -\infty$. Můžeme předpokládat, že existuje reálná posloupnost $(b_n) \subset H(a_n)$ s $\lim b_n = A$. Pro $A < +\infty$ a pro $A = +\infty \notin H(a_n)$ to plyne z definice suprema a pro $A = +\infty \in H(a_n)$ jsme hotovi. Protože každé číslo b_n je limitou podposloupnosti posloupnosti (a_n), snadno sestrojíme její podposloupnost (a_{m_n}), že pro každé n je $a_{m_n} \in U(b_n, 1/n)$. Pak $\lim a_{m_n} = \lim b_n = A$ a tedy $A \in H(a_n)$. □

Je jasné, že když limita $\lim a_n$ existuje, potom $H(a_n) = \{\lim a_n\}$. Dokážeme několik dalších vlastností liminfů a limsupů posloupností.

Tvrzení 10 ($\liminf \stackrel{?}{=} \limsup$**)** *Vždy platí, že* $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. *Obě hodnoty se rovnají, právě když existuje limita* $\lim a_n$, *a pak* $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$.

Důkaz. Nerovnost je zřejmá, protože $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Platí-li rovnost, je množina $H(a_n)$ jednoprvková, (a_n) nemá dvě podposloupnosti s různými limitami a podle části 2 tvrzení 7 v minulé přednášce (a_n) má limitu. Ta se rovná $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$. Pokud $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, posloupnost (a_n) má dvě podposloupnosti s různými limitami a nemá limitu. □

Věta 11 (vlastnosti liminfů a limsupů) *Nechť* (a_n) *je reálná posloupnost,* $A = \liminf a_n$ *a* $B = \limsup a_n$*.*

1. *Když* $A = -\infty$*, pak pro každé malé* c *je* $a_n < c$ *pro nekonečně mnoho* n*. Když* $A = +\infty$*, pak* $\lim a_n = +\infty$*.*
2. *Když* $A \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* ε *je* $a_n < A + \varepsilon$ *pro nekonečně mnoho* n *&* $a_n > A - \varepsilon$ *pro každé* $n > n_0$*.*
3. *Když* $B = +\infty$*, pak pro každé velké* c *je* $a_n > c$ *pro nekonečně mnoho* n*. Když* $B = -\infty$*, pak* $\lim a_n = -\infty$*.*
4. *Když* $B \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* ε *je* $a_n > B - \varepsilon$ *pro nekonečně mnoho* n *&* $a_n < B + \varepsilon$ *pro každé* $n > n_0$*.*

Důkaz. Dokážeme jen části 1 a 2, zbylé části 3 a 4 ponecháváme do úloh.

1. Nechť $A = -\infty$. Pak $\lim b_n = -\infty$ pro nějakou $(b_n) \preceq (a_n)$ a tvrzení zřejmě platí podle definice limity $-\infty$. Nechť $A = +\infty$. Pak $H(a_n) = \{+\infty\}$ a podle předešlého tvrzení se $\lim a_n = +\infty$.

2. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Protože existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ s $\lim b_n = A$, jistě $a_n < A + \varepsilon$ pro nekonečně mnoho n. Kdyby bylo $a_n \le A - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho n, měli bychom $(c_n) \preceq (a_n)$ s limitou $\lim c_n$ menší či rovnou $A - \varepsilon$, ale to nelze, protože $A = \min(H(a_n))$. Tedy $a_n > A - \varepsilon$ pro každé $n > n_0$. □

Liminfy a limsupy posloupností se používají v teorii čísel. Třeba pro funkci $\tau(n)$ počtu dělitelů čísla n (například $\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4$) se dá dokázat, že

$$\limsup \frac{\log(\tau(n))}{(\log 2)(\log n)/(\log\log n)} = 1\ .$$

Zde $(\tau(n)) = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, \dots)$.

• *Úlohy.* Dokažte části 3 a 4 věty.

• *Úlohy.* Najděte posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, že $H(a_n) = \mathbb{R}^*$. Ukažte, že neexistují reálné posloupnosti (a_n) a (b_n), že

$$H(a_n) = \mathbb{R} \ \text{ a } \ H(b_n) = [-1,\, 1] \setminus \{0\}\ .$$

Nekonečné řady

Zavedeme čtyři termíny z teorie řad. Podrobněji se řadami budeme zabývat příště. (Nekonečnou) řadou rozumíme posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Označujeme ji jako

$$\sum a_n,\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ či } \ a_1 + a_2 + \cdots\ .$$

Jejím součtem rozumíme limitu

$$\lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R}^*\ ,$$

když existuje. Součet řady označujeme opět jako $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ či $a_1 + a_2 + \cdots$. Členy posloupnosti $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, tedy čísla

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ \dots\ ,$$

nazýváme částečnými součty (dané řady). Čísla a_n jsou sčítance řady $\sum a_n$.

S řadami jsme se setkali v první přednášce v paradoxech nekonečna. Je pravda, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0\ ?$$

Není to pravda. První rovnost platí, je to rovnost dvou řad, tedy rovnost dvou zápisů jediné posloupnosti $(1, -1, 1, -1, \dots)$. Třetí rovnost také platí a říká, že součet řady samých nul je nula. Druhá rovnost ale neplatí. Jako rovnost dvou řad (posloupností) jistě neplatí. Neplatí ale ani jako rovnost součtů dvou řad: řada $1-1+1-1+\dots$ nalevo součet nemá, posloupnost jejích částečných součtů je $(1,0,1,0,\dots)$ a nemá limitu.

DĚKUJI ZA POZORNOST!