Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 12, 9. 5. 2024

RIEMANNŮV INTEGRÁL A JEHO POUŽITÍ: TRANSCENDENCE ČÍSLA $\mathbf{e} = 2.71828\dots$

Ptejme se po smyslu Riemannova integrálu a nemysleme přitom hned na plochu pod grafem.

Limita normovaných Riemannových součtů je střední hodnota funkce

• *Opakování definice R. integrálu.* Nechť $f \in \mathcal{F}([a,b])$. Podle definice 2 v př. 10 se R. integrál $\int_a^b f$ $(\in \mathbb{R})$ rovná společné limitě $\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)$ pro všechny posloupnosti $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$, pokud tato limita existuje. Rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a,b]$ se skládá z jeho dělení $\overline{a} = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b)$, $m \in \mathbb{N}$, a z bodů $\overline{t} = (t_1, \dots, t_m)$ v $[a,b]$, kde $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$, norma $\|\overline{a}\|$ je maximální velikost rozdílu $a_i - a_{i-1}$ pro $i \in [m]$ a $R(\overline{a}, \overline{t}, f) = \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) f(t_i)$ je Riemannův součet. Pokud R. integrál $\int_a^b f$ existuje, píšeme $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Zesílíme tvrzení 4 z př. 10 a dokážeme ekvivalentní definici R. integrálu.

Věta 1 (ε-δ definice $\int$) $\int_a^b f = c \iff$ *pro každé ε existuje δ, že když $(\overline{a}, \overline{t})$ je rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\| \le \delta$, potom $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - c| \le \varepsilon$.*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$. Nechť $(\overline{a_n}, \overline{t_n})$ je posl. rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ a je dáno ε. Vezmeme δ, že platí pravá strana ekvivalence, a k němu vezmeme n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow \|\overline{a_n}\| \le \delta$. Pak pro $n \geq n_0$ je $|R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) - c| \leq \varepsilon$. Takže $\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) = c$ a $\int_a^b f = c$ podle definice 2 v př. 10.

Implikace $\neg \Leftarrow \neg$. Máme ε a pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme rozdělení $(\overline{a_n}, \overline{t_n})$ intervalu $[a, b]$, že $\|\overline{a_n}\| \leq 1/n$ a $|R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) - c| > \varepsilon$. Tedy $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ nekonverguje k c, i když $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Není pravda, že $\int_a^b f = c$. $\square$

Důsledek 2 (Cauchyova podmínka pro $\int$) *Platí ekvivalence, že funkce $f \in \mathcal{R}(a, b) \iff$ pro každé ε existuje δ, že pro každá dvě rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{a'}, \overline{t'})$ intervalu $[a, b]$ s $\|\overline{a}\|, \|\overline{a'}\| \leq \delta$ je $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{a'}, \overline{t'}, f)| \leq \varepsilon$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $c = \int_a^b f$ a je dáno ε. Vezmeme δ, že platí pravá strana ekvivalence v předešlé větě. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{a'}, \overline{t'})$ jsou dvě rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\|\overline{a}\|, \|\overline{a'}\| \leq \delta$. Pak $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{a'}, \overline{t'}, f)| \leq |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - c| + |c - R(\overline{a'}, \overline{t'}, f)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Tedy platí nerovnost v důsledku.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ je posloupnost rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Pro dané ε vezmeme δ, že platí pravá strana ekvivalence v důsledku, a vezmeme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow \|\overline{a_n}\| \leq \delta$. Pro $m, n \geq n_0$ pak máme, že $|R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f) - R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)| \leq \varepsilon$. Posloupnost $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ je Cauchyova a tedy konvergentní. Podle definice 2 v př. 10 existuje $\int_a^b f$. $\square$

- *Normovaný Riemannův součet.* Definujeme ho jako

$$N(\overline{a},\, \overline{t},\, f) = \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{a_i - a_{i-1}}{b-a} f(t_i)\,.$$

Patrně $\frac{a_i - a_{i-1}}{b-a} \geq 0$ a $\sum_{i=1}^m \frac{a_i - a_{i-1}}{b-a} = 1$. Pro dané rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a, b]$ se tedy $N(\overline{a}, \overline{t}, f)$ rovná váženému průměru vzorku hodnot $f(t_i)$, $i \in [m]$, funkce f a hodnota $f(t_i)$ je vážena poměrnou délkou $\frac{a_i - a_{i-1}}{b-a}$ intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ obsahujícího t_i. Vidíme, že když $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak pro každou posloupnost $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ se normovaný Riemannův integrál

$$\tfrac{1}{b-a} \int_a^b f = \lim N(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)\,.$$

Tato společná limita je <u>střední hodnota funkce f</u> na intervalu $[a,b]$! *Výklad normovaného Riemannova integrálu střední hodnotou funkce je přesnější než obvyklé přirovnání integrálu k ploše pod grafem.*

Rozšíření Riemannova integrálu

R. integrál rozšíříme na funkce f definované na libovolném intervalu $I = M(f) \neq \emptyset$. Pro omezený interval I vezmeme $a := \inf(I)$ a $b := \sup(I)$. Pak položíme $g := (f \mid I^0) \cup \{(a,0),\ (b,0)\}$ a

$$\int_a^b f := \int_a^b g\,,$$

je-li pravá strana definovaná.

• *Úloha.* Na hodnotách funkce g v koncích a & b nezáleží.

• *Neomezené intervaly.* Pro zdola omezený a shora neomezený interval I vezmeme $a := \inf(I)$ a $\int_a^{+\infty} f$ definujeme jako společnou limitu

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a_n} f$$

pro všechny posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = +\infty$, pokud tato existuje. Podrobněji, pokud pro každé $b > a$ je $f \mid (a,b) \in \mathcal{R}((a,b))$ a pro každou posl. (a_n) s $\lim a_n = +\infty$ existuje $s = \lim \int_a^{a_n} f \in \mathbb{R}$, položíme $\int_a^{+\infty} f = s$.

• *Úloha.* Když tato limita vždy existuje, pak nezávisí na tom, jakou posloupnost (a_n) s $\lim a_n = +\infty$ bereme.

Podobně definujeme $\int_{-\infty}^{a} f$ s $a := \sup(I)$ pro $I = M(f)$ zdola neomezený a shora omezený. Konečně pro $M(f) = \mathbb{R}$ klademe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f \ \ (\in \mathbb{R})$$

pro všechny posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = -\infty$ a $\lim b_n = +\infty$, pokud tato společná vlastní limita vždy existuje.

Píšeme tedy i $\int_I f$ a $f \in \mathcal{R}(I)$. Např. $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b])$, ale $\mathcal{C}((a,b]) \not\subset \mathcal{R}((a,b])$ (viz níže).

Neomezená funkce nemá Riemannův integrál

Když $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je neomezená, pak existuje $(x_n) \subset [a,b]$, že $\lim f(x_n) = \pm\infty$. Buď dáno malé ε a velké $d > 0$. Vezmeme dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_m)$ intervalu $[a,b]$, že $\|\overline{a}\| \le \varepsilon$. Existuje $j \in [m]$, že pro nekonečně mnoho n je $x_n \in [a_{j-1}, a_j]$. Pro $i \ne j$ vezmeme libovolně $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$. Pak můžeme vzít $t_j = x_n \in [a_{j-1}, a_j]$ s tak velkou hodnotou $|f(t_j)|$, že $|R(\overline{a}, \overline{t}, f)| \ge d$. Tedy $\int_a^b f$ neexistuje.

• *Úloha.* Zobecněte to: je-li $I \ne \emptyset$ interval a $f \in \mathcal{F}(I)$ je neomezená, pak $f \notin \mathcal{R}(I)$.

ML odhad Riemannova integrálu

Tvrzení 3 (ML odhad) *Když $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $|f| \le c$, pak $\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)c$*

Důkaz. Plyne to snadno z odhadu $|R(\overline{a}, \overline{t}, f)| \le \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})|t_i| \le \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})c = (b-a)c$. □

Zde „M“ znamená maximum z $|f(x)|$ a „L“ je délka integračního intervalu.

Aditivita Riemannova integrálu

V následujícím nepíšeme symboly restrikcí $f \mid [a,b]$ a $f \mid [b,c]$.

Tvrzení 4 (aditivita 1) *$a < b < c$ jsou v $\mathbb{R}$ & f je v $\mathcal{F}([a,c])$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,c) \iff f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{R}(b,c)$. Když ekvivalence platí, potom $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{R}(b,c)$. Pak f je na $[a,c]$ omezená, $|f| \le d$. Stačí dokázat, že pro každou posl. $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ rozdělení intervalu $[a,c]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ posl. $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ je Cauchyova. Buď dáno ε a $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ buď zmíněná posloupnost. Pokud pro nějaké n a j je $a_{n,j-1} < b < a_{n,j}$, rozdělení $(\overline{a_n}, \overline{t_n})$ nahradíme rozdělením $(\overline{a_n'}, \overline{t_n'})$, v němž se interval $[a_{n,j-1}, a_{n,j}]$ nahradil intervaly $[a_{n,j-1}, b]$ a $[b, a_{n,j}]$ a bod $t_{n,j}$ body např. b a b. Když $b \in \overline{a_n}$, pak $(\overline{a_n'}, \overline{t_n'}) = (\overline{a_n}, \overline{t_n})$. Pro každé n je $R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) = R(\overline{a_n'}, \overline{t_n'}, f) + O(d\|\overline{a_n}\|)$, platí nerovnost $\|\overline{a_n'}\| \le \|\overline{a_n}\|$ a máme přirozený rozklad $(\overline{a_n'}, \overline{t_n'}) = (\overline{b_n}, \overline{u_n}) \cup (\overline{c_n}, \overline{v_n})$ na rozdělení intervalů $[a,b]$ a $[b,c]$, že $\|\overline{b_n}\|, \|\overline{c_n}\| \le \|\overline{a_n'}|$ a $R(\overline{a_n'}, \overline{t_n'}, f) = R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f) + R(\overline{c_n}, \overline{v_n}, f)$. Vezmeme n_0, že když $m, n \ge n_0$, pak $\|\overline{a_n}\| \le \varepsilon$ a

$$|R(\overline{b_m}, \overline{u_m}, f) - R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f)|,\ |R(\overline{c_m}, \overline{v_m}, f) - R(\overline{c_n}, \overline{v_n}, f)| \le \varepsilon\,.$$

Pak pro $m, n \ge n_0$ je i $|R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f) - R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)| \le O(d\varepsilon) + 2\varepsilon$ a $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ je Cauchyova.

Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že existuje integrál $\int_a^c f$, a odvodíme z toho, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Analogicky se dokáže, že také $f \in \mathcal{R}(b,c)$. Pro dané ε vezmeme δ, že pro interval $[a,c]$ platí pravá strana ekvivalence v důsledku 2. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{a'}, \overline{t'})$ jsou dvě libovolná rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\|, \|\overline{a'}\| \le \delta$. Vezmeme libovolné rozdělení $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[b,c]$ s $\|\overline{b}\| \le \delta$ a uvážíme spojená rozdělení $(\overline{c}, \overline{v}) = (\overline{a}, \overline{t}) \cup (\overline{b}, \overline{u})$ a $(\overline{c'}, \overline{v'}) = (\overline{a'}, \overline{t'}) \cup (\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[a,c]$. Patrně $\|c\|, \|c'\| \le \delta$. Protože $R(\overline{c},\overline{v},f) = R(\overline{a},\overline{t},f) + R(\overline{b},\overline{u},f)$ a $R(\overline{c'},\overline{v'},f) = R(\overline{a'},\overline{t'},f) + R(\overline{b},\overline{u},f)$, dostáváme odhad

$$|R(\overline{a},\overline{t},f) - R(\overline{a'},\overline{t'},f)| = |R(\overline{c},\overline{v},f) - R(\overline{c'},\overline{v'},f)| \le \varepsilon\,.$$

Podle důsledku 2 tedy existuje $\int_a^b f$.

Druhá část tvrzení plyne snadno z aditivity R. součtů: spojením dvou rozdělení $(\overline{a},\overline{t})$ a $(\overline{b},\overline{u})$ intervalů, po řadě, $[a,b]$ a $[b,c]$ vznikne takové rozdělení $(\overline{c},\overline{v})$ intervalu $[a,c]$, že platí rovnost $R(\overline{c},\overline{v}) = R(\overline{a},\overline{t}) + R(\overline{b},\overline{u})$ a $\|\overline{c}\| = \max(\{\|\overline{a}\|, \|\overline{b}\|\})$. □

Aditivitu R. integrálu potřebujeme i na neomezených intervalech.

Tvrzení 5 (aditivita 2) *Pro každé $a < b$ v $\mathbb{R}$ platí, že $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$, je-li pravá strana definovaná.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{R}((a,c))$ pro každé $c > a$ a existuje $\int_b^{+\infty} f =: d$ $(\in \mathbb{R})$. Nechť (a_n) má $\lim a_n = +\infty$. Pak podle předpokladu se $\lim \int_b^{a_n} = d$, takže podle tvrzení 4 a AL i

$$\lim \int_a^{a_n} f = \lim \big(\int_a^b f + \int_b^{a_n} f \big) = \lim \int_a^b f + \lim \int_b^{a_n} f = \int_a^b f + d\,.$$

Tedy $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + d = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$. □

Existence Riemannova integrálu

Následující tvrzení jsme loni dokázali, letos ho nedokazujeme.

Tvrzení 6 (nespojitost $\Rightarrow \neg\exists \int$) *Když $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je nespojitá v $\forall\, x \in [c,d] \subset [a,b]$, kde $c < d$, pak $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.*

Např. Dirichletova funkce $d\colon [0,1] \to \{0,1\}$, kde $d(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je všude nespojitá, takže není riemannovsky integrovatelná.

- *Úloha.* Dokažte to přímo.
- *Úloha.* Na druhou stranu dokažte, že když funkce $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je omezená a nespojitá jen v konečně mnoha bodech $x \in [a,b]$, potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Závislost existence R. integrálu na velikosti množiny bodů nespojitosti funkce vysvětlíme příště pomocí *Lebesgueovy věty*.

> **Věta 7 (monotonie $\Rightarrow \exists \int$)** *Pokud funkce $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je monotónní, pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{F}([a,b])$ je neklesající (pro nerostoucí funkci argumentujeme podobně). Nechť $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ je posloupnost rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Dokážeme, že $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ je Cauchyova. Pro dané ε vezmeme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow \|\overline{a_n}\| \leq \varepsilon$. Pro dané $m, n \geq n_0$ vezmeme dělení $\overline{a} = \overline{a_m} \cup \overline{a_n} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ a rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ s libovolnými body $\overline{t}$. Nechť $a_0 = a_{i_0} < a_{i_1} < \cdots < a_{i_l} = a_k$ jsou všechny členy v $\overline{a}$ ležící v $\overline{a_m}$. Jako v důkazu existence R. integrálu spojité funkce v př. 10 máme, že $R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f)$ se rovná

$$\sum_{r=1}^{l} \Bigg(\sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (a_j - a_{j-1}) f(t_j) - (a_{i_r} - a_{i_{r-1}}) f(t_{m,r}) \Bigg).$$

Opět $(\ldots) = \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (a_j - a_{j-1})(f(t_j) - f(t_{m,r}))$. Díky monotonii funkce f je $|f(t_j) - f(t_{m,r})| \leq f(a_{i_r}) - f(a_{i_{r-1}})$. Tedy $|(\ldots)| \leq (a_{i_r} - a_{i_{r-1}}) \cdot (f(a_{i_r}) - f(a_{i_{r-1}}))$ a $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f)| \leq \varepsilon \sum_{r=1}^{l} (f(a_{i_r}) - f(a_{i_{r-1}})) = \varepsilon (f(b) - f(a))$. Týž odhad dostaneme i s indexem n místo m. Tedy

$$|R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f) - R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)| \leq 2\varepsilon (f(b) - f(a))$$

a $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ je Cauchyova. $\square$

Výpočty Riemannových integrálů

• *Linearita.* Linearitu R. integrálu dokážeme pro obecný interval.

> **Tvrzení 8 (linearita $\int$)** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(I)$, kde $I \neq \emptyset$ je interval. Pak se $\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g$.*

Důkaz. Pro omezené intervaly dostaneme linearitu z definice 2 v př. 10 pomocí AL z linearity Riemannových součtů. Pro neomezené intervaly ji dostaneme opět pomocí AL z hořejší definice Riemannova integrálu přes neomezený interval. $\square$

• *Integrace per partes.* Uvedeme už třetí verzi vzorce pro integraci per partes, nyní pro Riemannův integrál.

> **Věta 9 (per partes pro R. $\int$)** *$a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, F, G, f & g jsou v $\mathcal{F}([a, b])$, $F' = f$, $G' = g$ & $Fg, fG \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG$.*

Důkaz. Díky linearitě i $fG + Fg \in \mathcal{R}(a, b)$. Odtud, z $FG = \int (fG + Fg)$ a z věty 13 v př. 10 (rovnost R. a N. integrálu) máme, že $\int_a^b fG + \int_a^b Fg = \int_a^b (fG + Fg) = [FG]_a^b$. Tedy $\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG$. $\square$

Znovu Eulerův integrál

Jeho druhá verze je pro Riemannův integrál.

> **Tvrzení 10 ($n! = \int$)** *Pro $n \in \mathbb{N}_0$ se $\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = n!$.*

Důkaz. Výpočet opět běží indukcí podle n jako pro Newtonův integrál. Je-li uvedený R. integrál I_n, pak $I_0 = 1 = 0!$, protože pro každou posl. (a_n) s $\lim a_n = +\infty$ se $\int_0^{a_n} \mathrm{e}^{-x} = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{a_n} = -\mathrm{e}^{-a_n}+1$ (podle věty 13 v př. 10) a $\lim(-\mathrm{e}^{-a_n}) = 0$. Nechť $m > 0$ a (a_n) má $\lim a_n = +\infty$. Podle předešlé věty se $\int_0^{a_n} x^m\mathrm{e}^{-x} = [-x^m\mathrm{e}^{-x}]_0^{a_n} + m\int_0^{a_n} x^{m-1}\mathrm{e}^{-x}$. Limitní přechod $n \to \infty$ dává vztah $I_m = -0 - (-0) + mI_{m-1}$, takže $I_m = mI_{m-1} = m \cdot (m-1)! = m!$. □

Posuny konečných i nekonečných integrálů

Potřebujeme jeden speciální případ substitučního pravidla. To uvedeme v obecnosti příště.

> **Tvrzení 11 (posun 1)** *$a < b$ & $f \in \mathcal{R}(a+c, b+c)$, <u>pak</u> platí rovnost $\int_a^b f(x+c) = \int_{a+c}^{b+c} f(x)$.*

Důkaz. Nechť a, b, f, c jsou, jak uvedeno, a $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ je libovolná posloupnost rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Rozdělení $(\overline{b_n}, \overline{u_n})$ intervalu $[a+c, b+c]$ získáme z $(\overline{a_n}, \overline{t_n})$ posunem o $c - a_{n,i}$ přejdou v $a_{n,i} + c$ a $t_{n,i}$ v $t_{n,i} + c$. Pak ovšem $R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f(x+c)) = R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f)$ a $\|\overline{b_n}\| = \|\overline{a_n}\|$. Tedy $\lim \|\overline{b_n}\| = 0$ a

$$\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f(x+c)) = \lim R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f) = \int_{a+c}^{b+c} f\ ,$$

což je uvedená rovnost Riemannových integrálů. □

> **Důsledek 12 (posun 2)** *Nechť existuje integrál $\int_a^{+\infty} f$. <u>Potom</u> $\int_0^{+\infty} f(x+a) = \int_a^{+\infty} f(x)$.*

Důkaz. Nechť posloupnost (a_n) má $\lim a_n = +\infty$. Pak podle předchozího tvrzení platí rovnost $\int_0^{a_n} f(x+a) = \int_a^{a+a_n} f(x)$. Tedy

$$\int_0^{+\infty} f(x+a) = \lim \int_0^{a_n} f(x+a) = \lim \int_a^{a+a_n} f(x) = \int_a^{+\infty} f\ ,$$

protože i $\lim(a + a_n) = a + \lim a_n = a + (+\infty) = +\infty$. $\square$

Transcendence Eulerova čísla $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$

• *Transcendentní čísla.* Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je transcendentní, pokud pro žádný nenulový polynom $p(x)$ s racionálními koeficienty neplatí, že $p(\alpha) = 0$. Např. číslo $\sqrt{2}$ *není* transcendentní, je *algebraické*, protože $p(\sqrt{2}) = 0$ pro $p(x) = x^2 - 2$. Každé transcendentní číslo je pochopitelně iracionální.

• *Transcendence čísla* e. Dokážeme ji pomocí Riemannových integrálů od 0 do $+\infty$ z vhodných funkcí.

Věta 13 (Ch. Hermite, 1873) *Číslo* $\mathrm{e} = \sum_{n\ge 0} 1/n! = 2.71828\ldots$ *je transcendentní*

Charles Hermite (1822–1901) byl francouzský matematik. Důkaz uvedený níže je asi o 20 let mladší a náleží německému matematikovi, rodákovi z Königsbergu, *Davidovi Hilbertovi (1862–1943)*.

Důkaz věty 13

Sporem. Pokud e není transcendentní a je algebraické, pak existují celá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, která nejsou všechna nulová a splňují rovnost (e): $a_0 + a_1\mathrm{e} + a_2\mathrm{e}^2 + \cdots + a_n\mathrm{e}^n = 0$. Zkrácením vhodné mocniny čísla e dosáhneme, že $\underline{a_0 \neq 0}$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujeme polynom $p_m(x) = x^m((x-1)(x-2)\ldots(x-n))^{m+1}$ a Riemannův integrál

$$I_m = \int_0^{+\infty} p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Díky tvrzení 8 a 10 tyto integrály existují a jsou to celá čísla.

Vezmeme součiny (e) $\cdot I_m$ a upravíme je podle tvrzení 8 a 5:

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{i=0}^n a_i \mathrm{e}^i \cdot I_m \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n a_i \mathrm{e}^i \int_0^i p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + \sum_{i=0}^n a_i \mathrm{e}^i \int_i^{+\infty} p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &=: A_m + B_m\,. \end{aligned}$$

Dokážeme, že (i) pro nějakou konstantu $c > 1$ je $A_m = O(c^m)$ ($m \in \mathbb{N}$), že (ii) pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $B_m \in \mathbb{Z}$ a je násobek čísla $m!$ a že (iii) pro nekonečně mnoho $m \in \mathbb{N}$ je $B_m \neq 0$. To dává spor:

$$0 = \frac{A_m}{m!} + \frac{B_m}{m!} = o(1) + \frac{B_m}{m!} \ \ (m \to \infty)\,,$$

ale $|B_m/m!| \geq 1$ pro nekonečně mnoho $m \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 14 (odhady výrazů A_m) *Pro nějaké $c > 1$ je $A_m = \sum_{i=0}^n a_i \mathrm{e}^i \int_0^i p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} = O(c^m)$ ($m \in \mathbb{N}$).*

Důkaz. Nechť $a > 0$ je maximum z $|a_i|\mathrm{e}^i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Pro $x \in [0, n]$ je $|p_m(x)| \leq n^{(n+1)(m+1)}$ a $0 \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1$. Z tvrzení 3 tak pro $m \in \mathbb{N}$ máme odhad $|A_m| \leq (n+1)a \cdot n^{(n+1)(m+1)} \cdot n$ a můžeme vzít $c = n^{n+1}$. □

Tvrzení 15 (vlastnosti výrazů B_m) *Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je číslo $B_m = \sum_{i=0}^n a_i \mathrm{e}^i \int_i^{+\infty} p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x} \in \mathbb{Z}$ a je dělitelné číslem $m!$. Pro nekonečně mnoho m je $B_m \neq 0$.*

Důkaz. Podle exponenciální identity (věta 13 v př. 4), tvrzení 8 a důsledku 12 se $a_i \mathrm{e}^i \int_i^{+\infty} p_m(x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ rovná

$$a_i \int_i^{+\infty} p_m(x) \cdot \mathrm{e}^i \cdot \mathrm{e}^{-x} = a_i \int_0^{+\infty} p_m(x+i) \cdot \mathrm{e}^i \cdot \mathrm{e}^{-(x+i)}\,,$$

což je $a_i \int_0^{+\infty} p_m(x+i) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Podle definice polynomu p_m se pro $i = 1, \ldots, n$ polynom $p_m(x+i) = b_i x^{m+1} + \ldots$ s $b_i \in \mathbb{Z}$ a $+ \ldots$ označujícím celočíselnou lin. kombinaci mocnin x vyšších než $m+1$. Pro $i = 0$ se $p_m(x) = \pm(n!)^{m+1} x^m + \cdots$. Díky tvrzení 8 a 10 je tedy $B_m \in \mathbb{Z}$ a násobek čísla $m!$. Dokonce B_m je modulo $(m+1)!$ kongruentní $\pm a_0 (n!)^{m+1} m!$, to jest

$$B_m = \pm a_0 (n!)^{m+1} m! + (m+1)! \cdot b$$

pro nějaké $b \in \mathbb{Z}$. Když $B_m = 0$, pak se $\pm a_0 (n!)^{m+1} = (m+1)b$, což pro $m+1$ nesoudělné s $a_0 \cdot n!$ $(\neq 0)$ není možné. Pro taková čísla $m \in \mathbb{N}$, kterých jistě je nekonečně mnoho, je $B_m \neq 0$. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST!