

Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 10, 25. 4. 2024

RIEMANNŮV INTEGRÁL. PRIMITIVNÍ FUNKCE

Důkaz věty 15 v minulé přednášce, že pro netriviální interval I funkce $f \in \mathcal{C}(I)$ má antiderivaci, byl složitý. Dnes to dokážeme jednodušeji pomocí Riemannova integrálu. Omezíme se na intervaly typu $I = [a, b]$, $a < b$.

Riemannův integrál

- *Riemannovy součty.* Dělení \bar{a} (intervalu I) je $n + 1$ -tice $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, kde $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. Jeho norma $\|\bar{a}\| > 0$ je největší délka $a_i - a_{i-1}$, $i \in [n]$, podintervalu. Rozdělení (intervalu I) je dvojice (\bar{a}, \bar{t}) , kde $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$ je dělení intervalu I a n -tice $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ splňuje pro každé $i \in [n]$, že $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

Definice 1 (Riemannovy součty) Nechť $f \in \mathcal{F}([a, b])$ & (\bar{a}, \bar{t}) je rozdělení intervalu $[a, b]$. Riemannův součet pro (\bar{a}, \bar{t}) & f je součet $R(\bar{a}, \bar{t}, f) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i) \in \mathbb{R}$.

Je to plocha sloupcového grafu $\bigcup_{i=1}^n [a_{i-1}, a_i] \times I(0, f(t_i))$ složeného z n obdélníků s rozměry $(a_i - a_{i-1}) \times |f(t_i)|$. Sloupce pod osou x s $f(t_i) < 0$ mají zápornou plochu.

- *Riemannův integrál.* Zavedeme Riemannův integrál.

Definice 2 (Riemannův \int) $f \in \mathcal{F}([a, b])$. Existuje-li pro \forall posl. (\bar{a}_n, \bar{t}_n) rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\bar{a}_n\| = 0$ limita $\lim R(\bar{a}_n, \bar{t}_n, f) \in \mathbb{R}$, označíme ji $\int_a^b f$ a nazveme ji (Riemannovým) integrálem funkce f od a do b . $\int_a^a f := 0$.

Kdybychom měli $\lim R(\bar{a}_n, \bar{t}_n, f) \neq \lim R(\bar{b}_n, \bar{u}_n, f)$, spojená posloupnost $((\bar{a}_1, \bar{t}_1), (\bar{b}_1, \bar{u}_1), (\bar{a}_2, \bar{t}_2), (\bar{b}_2, \bar{u}_2), \dots)$ dává spor.

- *Úloha.* Jak?

Když $[a, b] \subset M(f)$, pak místo $\int_a^b f \mid [a, b]$ píšeme jednodušeji $\int_a^b f$. *Bernhard Riemann (1826–1866)*, který patřil k největším matematikům 19. století, zemřel ve 40 letech na březích Lago Maggiore.

Tvrzení 3 (vlastnosti R. \int) *Potřebujeme tři.*

(1) *Když $c \in [a, b]$ a existují integrály $\int_a^c f$ & $\int_c^b f$, pak existuje $\int_a^b f$ & $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

(2) *Když $f \leq g$ na $[a, b]$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud tyto integrály existují.*

(3) $\int_a^b k_c = (b - a)c$.

- *Úloha.* Dokažte tyto výsledky pomocí Riemannových součtů.

Jsou-li \bar{a} & \bar{b} dělení intervalu $[a, b]$, pak \bar{a} zjemňuje \bar{b} , pokud $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Tvrzení 4 (stabilita R. \int) *Nechť $f \in \mathcal{F}([a, b])$ má $\int_a^b f$ a \bar{b} je dělení intervalu $[a, b]$. Pak pro každé ε existuje takové dělení \bar{a} intervalu $[a, b]$, že \bar{a} zjemňuje \bar{b} a pro každé rozdělení (\bar{a}, \bar{t}) je $|\int_a^b f - R(\bar{a}, \bar{t}, f)| \leq \varepsilon$.*

- *Úloha.* Dokažte toto tvrzení. Návod: kdyby existovalo ε , že pro každé zjemnění \bar{a} dělení \bar{b} existují body \bar{t} , že \dots , potom \dots

- *Riemannův integrál spojitě funkce.*

Věta 5 (spojitá funkce má \int_a^b) $\forall f \in \mathcal{C}([a, b]) \exists \int_a^b f$.

Důkaz. Necht' $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Stačí dokázat, že pro každou posloupnost $((\overline{a}_n, \overline{t}_n))$ rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\overline{a}_n\| = 0$ posloupnost $(R(\overline{a}_n, \overline{t}_n, f))$ je Cauchyova. Bud' dáno ε . Ze 6. př. víme, že f je stejnoměrně spojitá. Vezmeme proto takové δ , že $x, y \in [a, b]$, $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Necht' $((\overline{a}_n, \overline{t}_n))$ je zmíněná posloupnost. Vezmeme n_0 , že $n \geq n_0 \Rightarrow \|\overline{a}_n\| \leq \delta$. Necht' $m, n \geq n_0$ jsou dva libovolné indexy. Definujeme rozdělení $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[a, b]$ tak, že $\overline{b} = \overline{a}_m \cup \overline{a}_n$ a body v \overline{u} jsou libovolné. Necht' $\overline{b} = (a = b_0 < b_1 < \dots < b_k = b)$ a $b_0 = b_{i_0} < b_{i_1} < \dots < b_{i_l} = b_k$ jsou všechny členy v \overline{b} , které leží v \overline{a}_m . Pak $w := R(\overline{b}, \overline{u}, f) - R(\overline{a}_m, \overline{t}_m, f)$ je

$$\sum_{r=1}^l \left(\sum_{s=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_s - b_{s-1}) \cdot f(u_s) - (b_{i_r} - b_{i_{r-1}}) \cdot f(t_{m,r}) \right).$$

Ale $(\dots) = \sum_{s=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_s - b_{s-1})(f(u_s) - f(t_{m,r}))$, což v $|\dots|$ je $\leq \varepsilon(b_{i_r} - b_{i_{r-1}})$. Tedy $|w| \leq \varepsilon \sum_{r=1}^l (b_{i_r} - b_{i_{r-1}}) = \varepsilon(b - a)$. Totéž platí, když index m nahradíme indexem n . Tedy $|R(\overline{a}_m, \overline{t}_m, f) - R(\overline{a}_n, \overline{t}_n, f)| \leq 2\varepsilon(b - a)$ a posloupnost R. součtů je Cauchyova. \square

Tvrzení 6 (integrál u c) Necht' $f \in \mathcal{C}([a, b])$ & $c \in [a, b]$.

Pak $\int_a^x f = \int_a^c f + f(c)(x - c) + o(x - c)$ ($x \rightarrow c$).

Důkaz. Necht' je dáno ε . Protože f je v c spojitá, existuje δ , že $x \in U(c, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(c) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(c) + \varepsilon$. Necht' navíc $x \leq c$, případ s $x \geq c$ je podobný. Podle tvrzení 3 pro $\int_a^x f - \int_a^c f = -\int_x^c f = \int_x^c (-f)$ máme, že

$$\begin{aligned} \int_a^x f - \int_a^c f &\leq \int_x^c (\varepsilon - f(c)) = f(c)(x - c) + \varepsilon(c - x) \text{ i} \\ \int_a^x f - \int_a^c f &\geq \int_x^c (-\varepsilon - f(c)) = f(c)(x - c) - \varepsilon(c - x). \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Spojitá funkce má antiderivaci, podruhé

Zde je druhý důkaz věty 15 v minulé přednášce.

Věta 7 (existence antiderivace) *f je v $\mathcal{C}([a, b])$ a pro každé $x \in [a, b]$ necht' $F(x) := \int_a^x f$. Pak $F = \int f$.*

Důkaz. Necht' f, a, b jsou, jak uvedeno, a je dáno $c \in [a, b]$. Pak podle tvrzení 6 pro $x \in [a, b], x \neq c$, se

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c) + o(1) \quad (x \rightarrow c).$$

Tedy $F'(c) = f(c)$. □

Minule jsme pro důkaz existence primitivní funkce k $f \in \mathcal{C}([a, b])$ potřebovali skoro 6 stran, nyní asi 3.

Primitivní funkce: Darbouxova vlastnost

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ má Darbouxovu vlastnost, pokud pro každý interval $I \subset M$ i jeho obraz $f[I]$ je interval. Jak víme, každá $f \in \mathcal{C}$ má Darbouxovu vlastnost.

Věta 8 (derivace mají DV) *Když $f \in \mathcal{F}(I)$ má primitivní funkci, pak f má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Necht' $a < b$, funkce $f, F \in \mathcal{F}([a, b])$, $F = \int f$ a $f(a) < c < f(b)$, případ s $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Vezmeme funkci $G(x) := F(x) - cx$. Patrně $G' = F' - k_c = f - k_c$ a tedy G je spojitá. Podle věty 8 v př. 6 má G v nějakém $d \in [a, b]$ minimum. Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$ plyne podle tvrzení 5

v př. 8, že $d \in (a, b)$. Podle věty 2 v př. 7 se $G'(d) = f(d) - c = 0$, takže $f(d) = c$. \square

Z věty hned plyne, že třeba funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na žádném netriviálním intervalu I , jehož $I^0 \ni 0$, primitivní funkci. *Jean-Gaston Darboux (1842–1917)* byl francouzský matematik.

Výpočty primitivních funkcí

- *Linearita* PF. V dalším je $I \subset \mathbb{R}$ netriviální interval.

Tvrzení 9 (linearita \int) *Nechť $f, g, F, G \in \mathcal{F}(I)$, $F = \int f$ & $G = \int g$. Pak $aF + bG = \int (af + bg)$.*

Důkaz. Pokud f, g, F, G a I jsou, jak uvedeno, pak linearita derivování dává, že $(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$. \square

Například z $x^2/2 = \int x$ a $-\cos x = \int \sin x$ tak hned vidíme, že $-2 \cos x + x^2/2 = \int (2 \sin x + x)$.

- *Integrace per partes.* Tento vzorec je důležitější, než se zdá.

Věta 10 (per partes) *Nechť $f, g, F, G \in \mathcal{F}(I)$, $F = \int f$ a $G = \int g$. Pak $\int fG = FG - \int Fg$, je-li pravá strana definovaná – když $H = \int Fg$, pak $FG - H = \int fG$.*

Důkaz. Plyne to hned z Leibnizova vzorce a linearitě derivování: $(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG$. \square

Tento vzorec lze psát i jako $\int F'G = FG - \int FG'$. Známe-li primitivní funkci k FG' , máme primitivní funkci k $F'G$. Derivace přeskočí z F na G . Například $\int \log x = \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' = x \log x - \int \frac{x}{x} = x \log x - \int 1 = x \log x - x$. Nebo $\int x \sin x$

$= \int x(-\cos x)' = -x \cos x + \int x' \cos x = -x \cos x + \int \cos x = -x \cos x + \sin x$. Správnost obou výsledků se snadno zkontroluje zderivováním.

• *Integrace substitucí.* Jde o dva vzorce pro výpočet antiderivace. I a J jsou netriviální reálné intervaly.

Věta 11 (substituce) $g, g' \in \mathcal{F}(J)$, $g[J] \subset I$ a $f \in \mathcal{F}(I)$.

(1) $F = \int f \Rightarrow F(g) = \int f(g) \cdot g'$.

(2) $g[J] = I$, $g' \neq 0$ a $G = \int f(g) \cdot g' \Rightarrow G(g^{-1}) = \int f$.

Důkaz. 1. Derivace složeniny dává $(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$.

2. Podle věty 8 má g' Darbouxovu vlastnost. Na I tak buď $g' > 0$, anebo $g' < 0$, a g buď roste, anebo klesá. Podle části 2 věty 21 v př. 6 má g inverz $g^{-1} \in \mathcal{C}(I)$. Podle vzorců pro derivaci složeniny a inverzu, což jsou věty 17 a 19 v př. 7, se

$$(G(g^{-1}))' = G'(g^{-1}) \cdot (g^{-1})' = f(\underbrace{g(g^{-1})}_{=id_I}) \cdot g'(g^{-1}) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1})} = f.$$

□

Uvedeme příklady na oba vzorce.

Příklad 1. Pokud $F = \int f$ na I a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$, pak podle prvního vzorce je

$$\frac{F(ax+b)}{a} = \int f(ax+b) \text{ na } J := (I-b)/a.$$

Příklad 2. Necht' $I = (-1, 1)$, $f = \sqrt{1-x^2} | I$, $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $g = \sin x | J$. Nalezneme $\int f$. Podle integrace per partes máme $\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = \int (\sin x)' \cos x = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (\cos x)' = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x$. Proto

$\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = (\sin x \cdot \cos x + x)/2 =: G(x)$. Podle druhého vzorce a díky tomu, že na J se $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, máme, že

$$\int f = \int \sqrt{1 - x^2} = G(g^{-1}) = (x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)/2.$$

Kontrola derivováním: $(\frac{1}{2}x\sqrt{\dots} + \frac{1}{2}\arcsin x)' = \frac{1}{2}\sqrt{\dots} - \frac{x^2/2}{\sqrt{\dots}} + \frac{1/2}{\sqrt{\dots}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{\dots}} = \sqrt{\dots}$.

Riemannův integrál a primitivní funkce

Následující vztah plyne hned z věty 7.

Důsledek 12 (spojité funkce a PF) *Když $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a $F = \int f$, pak $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Důkaz. Z věty 7 víme, že $G(x) = \int_a^x f$ je primitivní k f . Podle věty 14 v minulé přednášce se funkce G a F liší jen o konstantu, takže $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f$. \square

Obecněji máme následující slabou *Základní větu analýzy 2*.

Věta 13 (obecněji) *Nechť jsou $F, f \in \mathcal{F}([a, b])$, $F = \int f$ a existuje $\int_a^b f$. Potom $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Důkaz. Nechť F a f jsou, jak uvedeno, a (\overline{a}_n) je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\overline{a}_n\| = 0$, $\overline{a}_n = (a_{n,0}, \dots, a_{n,k_n})$. Podle Lagrangeovy VSH pro každé $i \in [k_n]$ existuje $t_{n,i} \in (a_{n,i-1}, a_{n,i})$, že $F(a_{n,i}) - F(a_{n,i-1}) = F'(t_{n,i})(a_{n,i} - a_{n,i-1}) = f(t_{n,i})(a_{n,i} - a_{n,i-1})$. Pak ale, s $\overline{t}_n := (t_{n,1}, \dots, t_{n,k_n})$, pro každé n je

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k_n} (F(a_{n,i}) - F(a_{n,i-1})) = R(\overline{a}_n, \overline{t}_n, f)$$

a $\int_a^b f = \lim R(\overline{a}_n, \overline{t}_n, f) = \lim (F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$. \square

Ve 13. př. dokážeme o něco silnější verzi této věty. Předešlý důkaz osvětluje definici R. součtů, sice proč v rozdělení (\bar{a}, \bar{t}) intervalu $[a, b]$ místo obecného $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ nestačí třeba $t_i = a_{i-1}$ – důkaz by nefungoval.

Plocha pod grafem nezáporné funkce

Tuto plochu definujeme jako supremum takzvaných dolních součtů.

Definice 14 (dolní součty) Pro $f \in \mathcal{F}([a, b])$, děl. $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$ int. $[a, b]$ a $m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$, $i \in [n]$, je dolní součet $s(\bar{a}, f) := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot m_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- *Úloha.* Když \bar{a} zjemňuje \bar{b} , tak $s(\bar{a}, f) \geq s(\bar{b}, f)$.

Definice 15 (PG) Pro funkci $f \in \mathcal{F}([a, b])$, kde $f \geq 0$, je plocha pod G_f $PG(f) := \sup \left(\{s(\bar{a}, f) \mid \bar{a} \text{ je dělení } [a, b]\} \right)$.

$PG(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vždy existuje a je to supremum ploch sloupcových grafů úplně obsažených v množině $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Věta 16 (integrál a PG) Necht' $f \in \mathcal{F}([a, b])$, $f \geq 0$ a je omezená a existuje $\int_a^b f$. Potom $PG(f) = \int_a^b f$.

Důkaz. Necht' f, a, b jsou, jak uvedeno, a $f \leq c$. Pak patrně $P := PG(f) \leq c(b - a)$. Buď dáno ε . Vezmeme dělení \bar{a} intervalu $[a, b]$, že $P - \varepsilon \leq s(\bar{a}, f) \leq P$. Podle tvrzení 4 dělení \bar{a} zjemníme takovým dělením $\bar{b} = (b_0, \dots, b_n)$, že pro každé rozdělení (\bar{b}, \bar{t}) je $|\int_a^b f - R(\bar{b}, \bar{t}, f)| \leq \varepsilon$. Podle úlohy výše je $s(\bar{a}, f) \leq s(\bar{b}, f) \leq P$. Pro $i \in [n]$ a $m_i = \inf_{x \in [b_{i-1}, b_i]} f(x) \in \mathbb{R}$ vezmeme $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$,

že $m_i \leq f(t_i) \leq m_i + \varepsilon$. Pak $|R(\bar{b}, \bar{t}, f) - s(\bar{b}, f)| \leq \varepsilon(b - a)$ a $|s(\bar{b}, f) - P| \leq \varepsilon$. Tedy $|\int_a^b f - P|$ je nejvýše

$$|\int_a^b f - R(\bar{b}, \bar{t}, f)| + |R(\bar{b}, \bar{t}, f) - s(\bar{b}, f)| + |s(\bar{b}, f) - P| \leq \varepsilon + \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 2).$$

Tudíž $\int_a^b f = P = \text{PG}(f)$. \square

Předpoklad omezenosti f lze vynechat: později ukážeme, že neomezená funkce nemá R. integrál. Dostali jsme vzorec pro výpočet plochy pod grafem spojitě funkce.

Důsledek 17 (PG spojitě funkce) $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \geq 0$.

Pak f má antiderivaci a pro každou $F = \int f$ platí, že $F(b) - F(a) = \text{PG}(f)$.

Důkaz. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Je jistě omezená. Podle vět 5 a 7 funkce f má $\int_a^b f$ a primitivní funkci. Podle věty 13 a poslední věty pro každou $F = \int f$ se $F(b) - F(a) = \int_a^b f = \text{PG}(f)$. \square

Například pro $f = x^2 | [0, 1]$ vezmeme $F = x^3/3 | [0, 1]$ a dostaneme, že $\text{PG}(f) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Následující příklad ukazuje nedostatečnost R. integrálu. Antiderivace dává správnou hodnotu plochy pod grafem funkce, ta ale nemá Riemannův integrál.

Tvrzení 18 (nedostatečnost R. \int) Necht' $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ je dána zúžením $x^{-1/2} | (0, 1]$ a hodnotou $f(0) = 0$ a necht' $F(x) = 2\sqrt{x} | (0, 1]$. Pak

$$F = \int f | (0, 1] \text{ a } \text{PG}(f) = 2 = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x),$$

ale integrál $\int_0^1 f$ neexistuje.

Důkaz. Necht' f a F jsou, jak uvedeno. Je jasné, že $F = \int f \mid (0, 1]$ a že $F(1) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 2$. Spočítáme, že i $\text{PG}(f) = 2$. Pro $a \in (0, 1)$ necht' f_a je $f \mid [a, 1]$. Pak se podle předešlého důsledku $\text{PG}(f)$ rovná

$$\sup_{0 < a < 1} (a \cdot 0 + \text{PG}(f_a)) = \sup_{0 < a < 1} (F(1) - F(a)) = F(1) - 0 = 2.$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, pro každé dělení $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$ intervalu $[0, 1]$ a každé $c > 0$ můžeme volbou $t_1 \in (0, a_1]$ blízko u 0 získat rozdělení (\bar{a}, \bar{t}) s $R(\bar{a}, \bar{t}, f) \geq c$. $\int_0^1 f$ tedy neexistuje. \square

Tento problém Riemannova integrálu odstraníme jeho vylepšením na Henstock–Kurzweilův integrál.

Důkaz případu $\frac{\infty}{\infty}$ v LHP 2 Newtonovým integrálem

- *Newtonův integrál.*

Definice 19 (Newtonův integrál) Necht' $A < B$ jsou v \mathbb{R}^* , funkce $f, F \in \mathcal{F}((A, B))$ a $F = \int f$. Pak definujeme Newtonův integrál (N) $\int_A^B f := \lim_{x \rightarrow B} F(x) - \lim_{x \rightarrow A} F(x)$, jsou-li obě limity vlastní.

Existuje-li tento integrál, píšeme $f \in \mathcal{N}(A, B)$ a řekneme, že funkce f je (na intervalu (A, B)) newtonovsky integrovatelná. Pro $A \leq K < L \leq B$ místo (N) $\int_K^L f \mid (K, L)$ píšeme jednodušeji (N) $\int_K^L f$.

- *Úloha.* Pokud (N) $\int_A^B f$ existuje, nezávisí na volbě funkce F .
- *Úloha.* Když $f, g \in \mathcal{N}(A, B)$, pak $af + bg \in \mathcal{N}(A, B)$ & (N) $\int_A^B (af + bg) = a \cdot \text{(N)} \int_A^B f + b \cdot \text{(N)} \int_A^B g$.

Tvrzení 20 (monotonie N. \int) f, g jsou v $\mathcal{N}(A, B)$ & $f \leq g$. Pak $(N) \int_A^B f \leq (N) \int_A^B g$.

Důkaz. Necht' $F = \int f$, $G = \int g$ a $c < d$ jsou v (A, B) . Použijeme Lagrangeovu VSH pro funkci $F - G$ a interval $[c, d]$. Tedy existuje $e \in (c, d)$, že $F(d) - G(d) - (F(c) - G(c)) = (F - G)'(e) \cdot (d - c) = (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) = (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \leq 0$. Proto $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$. Nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \rightarrow A$ a $d \rightarrow B$ a dostáváme kýženou nerovnost. \square

• *Úlohy.* Necht' $f, g \in \mathcal{N}(A, B)$ a $|f| \leq g$. Pak $|(N) \int_A^B f| \leq (N) \int_A^B g$. Když $g \geq 0$, tak $(N) \int_A^B g \geq 0$.

Tvrzení 21 (aditivita N. \int) $f \in \mathcal{N}(A, B)$, $A < c < B$. Pak $\exists (N) \int_A^c f$ a $(N) \int_c^B f$ a $(N) \int_A^B f = (N) \int_A^c f + (N) \int_c^B f$.

Důkaz. Necht' f , A , B a c jsou, jak uvedeno, a necht' $F = \int f$. Protože $F'(c) = f(c)$, funkce F je v c spojitá a $\lim_{x \rightarrow c^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} F(x) = F(c)$. Tedy $(N) \int_A^c f = F(c) - \lim_{x \rightarrow A} F(x)$ a $(N) \int_c^B f = \lim_{x \rightarrow B} F(x) - F(c)$. Odtud máme, že $(N) \int_A^c f + (N) \int_c^B f = \lim_{x \rightarrow B} F(x) - \lim_{x \rightarrow A} F(x) = (N) \int_A^B f$. \square

• *Případ* $\frac{\infty}{\infty}$ LHP 2. Nejprve dokážeme jeden asymptotický vztah mezi Newtonovými integrály.

Tvrzení 22 (dva N. \int y) Necht' f, g jsou v $\mathcal{F}((a, b)) \cap \mathcal{N}(x, b)$ pro $a < x < b$, $g > 0$, $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) a $\lim_{x \rightarrow a} (N) \int_x^b g = +\infty$. Pak $(N) \int_x^b f = o((N) \int_x^b g)$ (\dots).

Důkaz. Necht' f a g jsou, jak uvedeno, a je dáno ε . První o říká, že pro nějaké $\delta \leq b - a$ platí, že $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot g(x)$. Díky limitě $\exists \theta \leq \delta$, že $x \in (a, a + \theta) \Rightarrow |(\mathbb{N}) \int_{a+\delta}^b f| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathbb{N}) \int_x^b g$. Pak pro každé $x \in (a, a + \theta)$ se podle tvrzení 21 $|(\mathbb{N}) \int_x^b f|$ rovná

$$|(\mathbb{N}) \int_x^{a+\delta} f + (\mathbb{N}) \int_{a+\delta}^b f| \leq |(\mathbb{N}) \int_x^{a+\delta} f| + |(\mathbb{N}) \int_{a+\delta}^b f|.$$

Podle obou \Rightarrow a úloh výše to je $\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathbb{N}) \int_x^{a+\delta} g + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathbb{N}) \int_x^b g \leq \varepsilon \cdot (\mathbb{N}) \int_x^b g$. \square

Věta 23 (LHP 2, $\frac{\dots}{\infty}$) Necht' $b < c$, $f, g, f', g' \in \mathcal{F}((b, c))$, $g' \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$ a existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Potom se $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Necht' b, c, f a g jsou, jak uvedeno, takže $g' > 0$ (úloha níže). Necht' $L = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a nejprve $L = 0$, takže $f'(x) = o(g'(x))$ ($x \rightarrow b$). Předchozí tvrzení dává $(\mathbb{N}) \int_x^c f' = o((\mathbb{N}) \int_x^c g')$ ($x \rightarrow b$). Tedy $f(x) = f(c) - o(1)(g(c) - g(x))$ a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(x)} + o(1)(1 - \frac{g(c)}{g(x)}) = o(1) + o(1)(1 - o(1)) = o(1)$. Proto $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = L$. Pro obecné $L \in \mathbb{R}$ vezmeme $h(x) = f(x) - Lg(x)$, pak $\lim_{x \rightarrow b} \frac{h'(x)}{g'(x)} = 0$. Podle už dokázaného případu je $0 = \lim_{x \rightarrow b} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} - L$ a $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. \square

Důkaz jsme převzali z učebnice analýzy I. I. Ljaško, V. F. Emel'janov a A. K. Bojarčuk, *Osnovy klassičeskogo i sovremennogo Matematičeskogo Analiza* (Kijev, 1988) (str. 206–7). Věta platí i pro nevlastní limity $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, důkaz ale odsouváme do **K**.

- *Úloha.* Proč je $g' > 0$ na (b, c) ?

- *Úloha.* Ukažte, že věta platí i pro $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$ a pro definiční obory (c, b) , $P(b, \delta)$, $(c, +\infty)$ a $(-\infty, c)$.
- *Úloha.* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\cot x} = ?$

DĚKUJI ZA POZORNOST!