Přednáška 9, 28. listopadu 2014

Část 4: limita funkce v bodě a spojitost funkce

Zápisem
$$f:\ M \to \mathbb{R}$$
rozumíme, že je dána funkce definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ reálných čísel, což je množina dvojic $f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in M\}$. Posloupnost $a = (a_n) \subset \mathbb{R}$ je speciální případ, je to funkce $a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde $M = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Pro definici limity funkce v bodě budeme potřebovat pojem okolí bodu a značení pro něj.

Nechť $\delta > 0$ je reálné číslo. Pro $a \in \mathbb{R}$ množinu
$$U(a,\delta) := (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}\ ,$$
to jest body se vzdáleností od a menší než δ, nazveme *δ-okolím bodu a*. Pro $a = \pm\infty$ položíme
$$U(-\infty,\delta) := (-\infty, -1/\delta) \ \text{ a } \ U(+\infty,\delta) := (1/\delta, +\infty)\ .$$
Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ se pro $\delta \to 0$ okolí $U(a,\delta)$ zmenšuje, stahuje kolem a ($0 < \delta' < \delta \Rightarrow U(a,\delta') \subset U(a,\delta)$ a také $b \in \mathbb{R}, b \neq a \Rightarrow \exists \delta > 0:\ b \notin U(a,\delta)$). Pro $a \in \mathbb{R}$ *prstencové δ-okolí bodu a* označuje množinu
$$P(a,\delta) := U(a,\delta)\backslash\{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}\ .$$
Pravé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, obyčejné a prstencové, je
$$U^+(a,\delta) := [a, a+\delta) \ \text{ a } \ P^+(a,\delta) := (a, a+\delta)\ .$$
Podobně se definuje *levé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$*, obyčejné $U^-(a,\delta) = (a-\delta, a]$ a prstencové $P^-(a,\delta) = (a-\delta, a)$. Pro $a = \pm\infty$ prstencová a jednostranná okolí definujeme jako rovná obyčejnému okolí $U(\pm\infty,\delta)$.

Když $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, pak řekneme, že $a \in \mathbb{R}^*$ je *hromadným bodem množiny M*, když pro každé $\delta > 0$ je $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$. Ekvivalentně řečeno, $a = \lim a_n$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset M\backslash\{a\}$.

Definice (limita funkce v bodě). *Nechť $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak definujeme*
$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(P(a,\delta) \cap M) \subset U(A,\varepsilon)$$

— *funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.*

Jinak řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že když $x \in P(a, \delta)$ a f je v x definovaná, pak nutně $f(x) \in U(A, \varepsilon)$. Jak a tak A může být i $\pm\infty$. Je důležité, že $\lim_{x \to a} f(x)$ nezávisí na hodnotě $f(a)$, ba ani $f(x)$ nemusí být v bodě a definovaná (tj. $a \notin M$).

A co kdyby a nebyl hromadným bodem M? Pak by existovalo $\delta > 0$, že $P(a, \delta) \cap M = \emptyset$, tedy $f(P(a, \delta) \cap M) = \emptyset$ a inkluze $f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$ by platila pro každé A a $\varepsilon > 0$. Cokoli by pak bylo limitou $f(x)$ v a, což není šikovná definice. Proto se požaduje, aby a byl hromadným bodem M.

Tato definice zobecňuje limitu posloupnosti: když posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ chápeme jako funkci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak zřejmě

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} a(x) ,$$

existuje-li alespoň jedna strana.

Pár příkladů limit funkcí. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$ a $P(a, \delta) \subset M$. Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Nechť $a = -\infty, A = +\infty$ a $M = \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall c \; \exists d : \; x < d \Rightarrow f(x) > c$$

($c, d \in \mathbb{R}$ a představujeme si je jako hodně záporné, respektive hodně kladné, číslo).

Uvažme funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$g(x) = \begin{cases} x & \dots \quad x \neq 0 \\ 2014 & \dots \quad x = 0 . \end{cases}$$

Pak samozřejmě $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, protože pro limitu v 0 je $g(0)$ irelevantní. Funkce znaménka, signum, $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, je definovaná jako

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \dots \quad x < 0 \\ \;\; 0 & \dots \quad x = 0 \\ \;\; 1 & \dots \quad x > 0 . \end{cases}$$

Pak $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ neexistuje a $\lim_{x \to a} \mathrm{sgn}(x)$ je 1 pro $a > 0$ a -1 pro $a < 0$.

Uvažme funkci $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definovanou jako

$$f(p/q) = 1/q \ ,$$

kde zlomek p/q je v základním tvaru. Tvrdíme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \ .$$

Jak to dokázat? Uvažme okolí $U(a, 1/2) = (a - 1/2, a + 1/2)$ a číslo $n \in \mathbb{N}$ a zamysleme se, kolik zlomků v základním tvaru a se jmenovatelem nejvýše n padne do $U(a, 1/2)$. Jistě jen konečně mnoho (přesněji, je jich nejvýše $1+2+\cdots+n$, rozmyslete si proč). Když pak $\delta > 0$ zvolíme menší než nejmenší vzdálenost od takového zlomku různého od a do a, v okolí $P(a, \delta)$ už ani jeden z těchto zlomků neleží. Takže $p/q \in P(a, \delta) \Rightarrow q > n$ a $f(p/q) = 1/q < 1/n$ a tedy $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Pro úplnost, limity $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ neexistují.

Konečně spočteme limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \ .$$

Zde funkce definovaná zlomkem pro $x = 0$ ani není definovaná, dostáváme neurčitý výraz $0/0$. Řada pro exponenciální funkci pro každé $x \in P(0, 1/2)$ dá odhad

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} < \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1 - |x|} < 2|x| \ ,$$

kde jsme použili vzorec pro součet geometrické řady. Tedy, pro $0 < \delta < 1/2$, $x \in P(0, \delta) \Rightarrow (e^x - 1)/x \in U(1, 2\delta)$, což dává naši limitu (pro dané $\varepsilon > 0$ volíme $\delta = \varepsilon/2$).

Jednostranné limity funkcí. Když $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a pro každé $\delta > 0$ je $P^+(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$, pak definujeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ f(P^+(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$$

— funkce $f(x)$ má v bodě a *limitu zprava* rovnou A. Obdobně definujeme limitu zleva, $P^+(a, \delta)$ se nahradí levým okolím $P^-(a, \delta)$.

V $a = \pm\infty$ jednostranné limity neuvažujeme. Například $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$ a $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$.

Úloha. *Rozmyslete si, že ($a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$)*

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A \;\&\; \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

a

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A \;\vee\; \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right)$$

a proč disjunkci $\vee$ nemůžeme nahradit konjunkcí &.

Definice (spojitost funkce v bodě). *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $a \in M$. Pak řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, když*

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 :\; f(U(a,\delta) \cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\;.$$

Jinými slovy, spojitost $f(x)$ v a znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 :\; x \in M,\; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\;.$$

Dostatečně malá změna v argumentu funkce f tedy způsobí jen (předem omezenou) malou změnu funkční hodnoty.

Rozebereme souvislost s limitou. Když $a \in M$ není hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, čili $U(a,\delta) \cap M = \{a\}$ pro nějaké $\delta > 0$, postulovali jsme v hořejší definici, že $\lim_{x\to a} f(x)$ není definovaná. Nicméně v této situaci podle právě uvedené definice je stále $f(x)$ spojitá v a. Je-li $a \in M$ hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, pak spojitost $f(x)$ v a znamená přesně, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\;.$$

Definuje se i jednostranná spojitost: když $a \in M$, $f : M \to \mathbb{R}$ a

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 :\; f(U^+(a,\delta) \cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\;,$$

pak řekneme, že $f(x)$ je v a *zprava spojitá*. Podobně pro spojitost zleva.

Tvrzení (jednoznačnost limity funkce). *$\lim_{x\to a} f(x)$ je určena jednoznačně, když existuje.*

Důkaz. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M, $A, B \in \mathbb{R}^*$ jsou dva různé prvky a $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Pak vezmeme $\varepsilon > 0$, že $U(A,\varepsilon)$ a $U(B,\varepsilon)$ jsou disjunktní (což podle definice okolí lze). Mělo by existovat $\delta > 0$, že

$$f(P(a,\delta) \cap M) \subset U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset \,.$$

To není možné, protože $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Následující věta ukazuje, že pojem limity funkce v bodě se dá ekvivalentně popsat jen pomocí pojmu limity posloupnosti.

Věta (Heineho definice limity funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem M, $A \in \mathbb{R}^*$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$,
2. *pro každou takovou posloupnost $(x_n) \subset M$, že $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé n, je $\lim f(x_n) = A$.*

Důkaz. Nechť platí 1. Je dána posloupnost $(x_n) \subset M$, že $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé n. Nepřítel dal $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu o $f(x)$ vezmeme $\delta > 0$, že $f(P(a,\delta) \cap M) \subset U(A,\varepsilon)$. Podle předpokladu o (x_n) existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ je $x_n \in P(a,\delta) \cap M$. Tedy, pro $n > n_0$, je $f(x_n) \in U(A,\varepsilon)$, což jsme chtěli dokázat — $\lim f(x_n) = A$.

Nechť 1 neplatí. Takže (negujeme definici limity funkce) existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $x \in P(a,\delta) \cap M$, že $f(x) \notin U(A,\varepsilon)$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\delta = 1/n$ zvolíme takový bod $x = x_n$ (že $x_n \in P(a, 1/n) \cap M$, ale $f(x_n) \notin U(A,\varepsilon)$). Vzniklá posloupnost $(x_n) \subset M$ popírá část 2: zřejmě $x_n \neq a$ pro každé n a $\lim x_n = a$, avšak posloupnost $(f(x_n))$ nemá za limitu A (všechny její členy mají od A „vzdálenost“ alespoň $\varepsilon > 0$). $\square$

Věta nese jméno německého matematika Eduarda Heineho (1821–1881), jehož známe již ze třetí přednášky, nikoli básníka a literáta *Heinricha Heineho (1797–1856).*

Tvrzení (aritmetika limit funkcí). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g jsou definované na nějakém prstencovém okolí a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *je-li tento součet definován,*
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$, *je-li tento součin definován a*

3. *je-li navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí a, pak i $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = A/B$, je-li tento podíl definován.*

Důkaz. Pomocí Heineho definice limity funkce se to snadno převede na tvrzení o aritmetice limit posloupností. Detaily necháváme jako úlohu. □

Tvrzení (limita monotónní funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce (neklesající nebo nerostoucí). Pak obě limity*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad a \quad \lim_{x\to b} f(x)$$

existují (mohou být nevlastní).

Důkaz. Nechť je $f(x)$ na intervalu (a, b) neklesající, pak zřejmě

$$\lim_{x\to b} f(x) = \sup(f((a, b)))$$

(pro shora neomezenou množinu $f((a, b))$ toto supremum definujeme jako $+\infty$). Argument je stejný jako v důkazu tvrzení o limitě monotónní posloupnosti, detaily necháváme jako úlohu. Ostatní tři případy (nerostoucí $f(x)$, limita v a) jsou podobné. □