

Přednáška 5, 31. října 2014

Dvě základní limity. Necht' $\alpha, q \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \dots & \alpha > 0 \\ 1 & \dots & \alpha = 0 \\ 0 & \dots & \alpha < 0 \end{cases}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \dots & q > 1 \\ 1 & \dots & q = 1 \\ 0 & \dots & -1 < q < 1 \\ \text{neexistuje} & \dots & q \leq -1. \end{cases}$$

Ponecháváme jako úlohu.

Tři důležité věty o posloupnostech. Připomeňme si, že jako monotónní posloupnost označujeme neklesající nebo nerostoucí posloupnost.

Věta (o monotónní podposloupnosti). Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.

Důkaz. Necht' $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \dots$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \dots < k_j$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit. Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v $k_1 + 1$ špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots$ a jsme zase hotovi. \square

Úloha. Nechť $l = (k - 1)^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte postupem z předchozího důkazu, že každá l -tice $(a_1, a_2, \dots, a_l) \subset \mathbb{R}$ obsahuje podposloupnost délky k , která je monotónní. (Návod: když každému $n \in \{1, 2, \dots, l\}$ přiřadíme dvojici (r, s) , kde r je délka nejdelší neklesající podposloupnosti začínající v a_n a obdobně s pro nerostoucí, pak toto zobrazení je ...)

Výsledek se podle jeho objevitelů, maďarských matematiků Paula (Pála) Erdőse (1913–1996) a Georga (Györgyho) Szekereše (1911–2005), nazývá Erdősovo–Szekeresovo lemma. Úložka: dá se při pevném k hodnota $(k - 1)^2 + 1$ zmenšit?

Věta (Bolzanova–Weierstrassova). Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n) , jež je zjevně omezená. Podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti je (b_n) konvergentní. \square

Úloha. Dokažte B.–W. větu jiným způsobem, bez použití věty o monotónní podposloupnosti, za pomoci Cantorovy věty o vnořených intervalech. (Návod: když $(a_n) \subset [a, b]$, dělte $[a, b]$ opakovaně napůl tak, že vzniklý interval stále obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) .)

Věta se jmenuje podle pražského italsko–německého matematika, kněze a filozofa Bernarda Bolzana (1781–1848) a německého matematika Karla Weierstrasse (1815–1897). Lehce se rozšíří na neomezené posloupnosti: každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost s vlastní nebo nevlastní limitou.

Důležitá definice. Jak jsem už zmínil ve 3. přednášce, posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je *cauchyovská* (též *Cauchyova*), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon .$$

Členy posloupnosti se tedy k sobě vzájemně (v tomto přesném smyslu) neomezeně blíží.

Věta (Cauchyho podmínka). Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je *cauchyovská*, právě když je *konvergentní*.

Důkaz. Nejprve \Leftarrow . Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0 , že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Podle Δ -ové nerovnosti,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon ,$$

a (a_n) je tedy cauchyovská.

Nyní \Rightarrow . Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ buď cauchyovská. Je tedy omezená. (Nechť $\varepsilon = 1$ a n_0 splňuje, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Pak položíme $m = n_0 + 1$ a pro každé n je $|a_n| \leq \max(\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|\})$.) Podle B.–W. věty má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ nyní vezmeme n_0 , že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ a i $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Pro každé $n > n_0$ potom máme

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < 2\varepsilon$$

(první $|\cdot| < \varepsilon$ díky cauchyovskosti neboť $k_n \geq n$ a druhá $|\cdot| < \varepsilon$ díky $a_{k_n} \rightarrow a$) a tedy a je limitou celé posloupnosti, $\lim a_n = a$. \square

Nevlastní limity jsou v rozporu s cauchyovskostí: je jasné, že když $\lim a_n = \pm\infty$, pak (a_n) není Cauchyova. Cauchyovskost posloupnosti je důležitá vlastnost, která umožňuje zkoumat úplnost (nepřítomnost „děr“) daného prostoru i za situace, kdy nemáme k dispozici uspořádání jako v \mathbb{R} , třeba v případě komplexních čísel \mathbb{C} vybavených obvyklou vzdáleností $|z_1 - z_2|$. Ve světě zlomků \mathbb{Q} tato věta pochopitelně neplatí: když $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ má za limitu $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tak je posloupnost (a_n) cauchyovská, ale nemá ve \mathbb{Q} limitu.

Aritmetika nekonečen. Jak jsem slíbil, tvrzení o aritmetice limit nyní rozšíříme na nevlastní limity. *Rozšířená reálná osa* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na \mathbb{R}^* definujeme následovně:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty ; \\ \forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty : a + (+\infty) &= (+\infty) + a = +\infty ; \\ \forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty : a + (-\infty) &= (-\infty) + a = -\infty ; \\ \forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0 : a(\pm\infty) &= (\pm\infty)a = \pm\infty ; \\ \forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 : a(\pm\infty) &= (\pm\infty)a = \mp\infty ; \\ \forall a \in \mathbb{R} : \frac{a}{\pm\infty} &= 0 . \end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty), 0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot 0, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy*.

Tvrzení (rozšířená aritmetika limit). Necht' $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, je-li tento součet definován,
2. $\lim(a_n b_n) = ab$, je-li tento součin definován a
3. pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n > n_0$, pak $\lim(a_n/b_n) = a/b$, je-li tento podíl definován.

Důkaz je ponechán jako úloha. Vlastně toto tvrzení zdůvodňuje aritmetiku nekonečen: pravidlo jako například $\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 : a(-\infty) = +\infty$ je jen přepisem výsledku, že pro každé dvě posloupnosti čísel $(a_n), (b_n)$ s $\lim a_n = a < 0$ a $\lim b_n = -\infty$ platí, že $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

Zmiňme, že neurčitý výraz je i

$$1^{\pm\infty}$$

(v tom se občas chybuje): když $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = 1$ a např. $\lim b_n = +\infty$, pak o limitě posloupnosti $(a_n^{b_n})$ lze říci jen to, že buď neexistuje nebo to je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$ (vymyslete příslušné příklady). Ale (dotaz na přednášce) snadno se vidí, že $0^{+\infty} = 0$ a, obecněji, $a^{+\infty} = 0$ pro $0 \leq a < 1$ a $a^{+\infty} = +\infty$ pro $a > 1$. Podobně $a^{-\infty} = +\infty$ pro $0 < a < 1$ a $a^{-\infty} = 0$ pro $a > 1$. Ale $0^{-\infty}$ je neurčitý výraz!

Je zajímavé, že některé neurčité výrazy jsou neurčitější než jiné. Třeba

$$\frac{0}{0} = \text{úplně cokoli, ale pro } a \neq 0 \text{ je } \frac{a}{0} = +\infty \text{ nebo } -\infty \text{ nebo neexistuje.}$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^*$ se totiž lehce najdou posloupnosti $(a_n), (b_n)$, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim(a_n/b_n) = \alpha$, popř. neexistuje. Pro druhý neurčitý výraz však máme jen tři uvedené možnosti.

Limes inferior a limes superior. Podle rozšířené B.–W. věty má každá posloupnost (a_n) konvergentní podposloupnost nebo podposloupnost jdoucí do $-\infty$ nebo jdoucí do $+\infty$. Každá (a_n) má tedy alespoň jeden *hromadný bod* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, což je vlastní nebo nevlastní limita nějaké podposloupnosti. Označíme

$$\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\} (\neq \emptyset).$$

Snadno se vidí, že H má největší i nejmenší prvek. (Když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem. Je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c zřejmě i horní mez pro H . Nechť $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$. Podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $n \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/n, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $n = 1, 2, \dots$ vybereme vhodně členy a_{k_1}, a_{k_2}, \dots , že $k_1 < k_2 < \dots$ a pro každé n je $a_{k_n} \in [\alpha - 2/n, \alpha]$. Tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α . Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek. Podobně se ukáže, že H má nejmenší prvek.) Definujeme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \max(H).$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity \liminf a \limsup vždy existují a jsou definované pro každou posloupnost.

Úloha. *Sestrojte posloupnost reálných čísel, pro niž $H = \mathbb{R}^*$, to jest každé reálné číslo, $-\infty$ i $+\infty$ je její hromadný bod.*

Příklad. Posloupnost (a_n) s $a_n = 1/n + n^{1+(-1)^n}$ má $\liminf a_n = 1$ a $\limsup a_n = +\infty$.

Uvedeme druhou, ekvivalentní, definici \liminf a \limsup . Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme dvě nové posloupnosti (b_n) a (c_n) ,

$$b_n = \sup(\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \quad \text{a} \quad c_n = \inf(\{a_n, a_{n+1}, \dots\}).$$

Je-li (a_n) shora neomezená, máme (resp. definujeme) $b_1 = b_2 = \dots = +\infty$, jinak je $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podobně $c_1 = c_2 = \dots = -\infty$ je-li (c_n) zdola neomezená, jinak je $c_1 \leq c_2 \leq \dots$ neklesající posloupnost reálných čísel. V prvním případě definujeme $\lim b_n = +\infty$, ve druhém $\lim b_n$ existuje vlastní či je $-\infty$ podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti. Podobně klademe $\lim c_n = -\infty$ v prvním případě, a jinak je $\lim c_n$ vlastní či $+\infty$.

Tvrzení (o \liminf a \limsup). *Limita $\lim a_n$ existuje (vlastní či nevlastní), právě když $\liminf a_n = \limsup a_n$, pak $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$. Dále*

$$\limsup a_n = \lim b_n \quad \text{a} \quad \liminf a_n = \lim c_n.$$

Důkaz. Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ existuje, pak podle tvrzení o limitě podposloupnosti má každá podposloupnost limitu a , tedy $H = \{a\}$, $\liminf a_n = \min(H) = a = \max(H) = \limsup a_n$. Předpokládejme naopak, že $\lim a_n$ neexistuje. Podle rozšířené B.-W. věty má (a_n) podposloupnost s limitou $a \in \mathbb{R}^*$. Protože a není limitou celé posloupnosti, pro $a \in \mathbb{R}$ existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) . Pokud $a = +\infty$, existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(1/\varepsilon, +\infty)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) . Podobně pro $a = -\infty$ s intervalem $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tyto členy posloupnosti (a_n) tvoří její podposloupnost (d_n) . Posloupnost (d_n) má podle rozšířené B.-W. věty podposloupnost s limitou $b \in \mathbb{R}^*$. Podle tvrzení o limitě a uspořádání i b leží mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, respektive mimo $(1/\varepsilon, +\infty)$, respektive mimo $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tedy $a \neq b$ a $a, b \in H$, a proto i nejmenší a největší prvek H , $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$, se liší.

Dokážu, že $\lim b_n = \limsup a_n$, důkaz pro $\lim c_n = \liminf a_n$ je stejný. Je-li (a_n) shora neomezená pak jistě $\lim b_n = +\infty$ i $\limsup a_n = +\infty$. Nechť je (a_n) shora omezená a (d_n) je její podposloupnost s limitou rovnou $\limsup a_n$. Protože b_n je horní mezí skoro všech d_n (s možnou výjimkou d_1, d_2, \dots, d_{n-1}), máme (podle tvrzení o limitě a uspořádání) pro každé n i $b_n \geq \limsup a_n$ a tedy i $\lim b_n \geq \limsup a_n$. Na druhou stranu z definice čísel b_n snadno sestrojím podposloupnost (a_{k_n}) posloupnosti (a_n) , že pro každé n je $b_n \geq a_{k_n} > b_n - 1/n$. Pak podle věty o dvou polícajtech je $\lim b_n = \lim a_{k_n}$, tedy $\lim b_n \in H$ a $\lim b_n \leq \limsup a_n$. Celkem tedy $\lim b_n = \limsup a_n$. \square

Jak se dá představit $\limsup a_n$ (a podobně $\liminf a_n$)? Z $+\infty$ posouváme dolů píst, dokud nenarazí na členy posloupnosti (a_n) (nedá-li se píst nikam umístit, je $\limsup a_n = +\infty$). Pak se nachází v poloze b_1 . Smažeme a_1 , čímž se mohlo uvolnit místo, a znovu posouváme dolů píst, dokud nenarazí na zbylé členy posloupnosti. Nachází se v poloze b_2 . Smažeme a_2 a posouváme dolů píst. A tak postupujeme dále. Mezní poloha, k níž se píst přibližuje, je $\limsup a_n$. Jiný možný pohled na $\limsup a_n$ je lehkotletický. Pro shora omezenou posloupnost (a_n) řekneme, že přeskočí laťku ve výšce $l \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon > 0$ pro nekonečně mnoho n je $a_n > l - \varepsilon$. Pak $\limsup a_n$ je přesně nejvyšší laťka, kterou (a_n) přeskočí.