Přednáška 12, 19. prosince 2014

Důkaz. 1. Můžeme předpokládat, že f není konstantní (konstantní funkce má nulovou derivaci na celém (a,b)) a že $f(c) > f(a) = f(b)$ pro nějaké $c \in (a,b)$ (případ $f(c) < f(a) = f(b)$ je podobný). Podle principu maxima f nabývá na $[a,b]$ největší hodnotu, což nenastává ani v a ani v b, nastává to tedy ve vnitřním bodě intervalu $[a,b]$. V tomto bodě má f derivaci a ta podle předchozího Důsledku musí být nulová.

2. Funkce $h(x) = f(x) - f(a) - (x-a)(f(b) - f(a))/(b-a)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty ($h(a) = h(b) = 0$) a $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nulový bod $h'(x)$ je tedy hledaná hodnota c pro $f(x)$.

3. Důkaz je podobný jako ve 2. □

Uvedeme několik důsledků vět o střední hodnotě. První je populární nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Dokáže se pomocí Cauchyovy věty o střední hodnotě, ale z časových důvodů důkaz na přednášce (ne však v učebním textu) pomineme.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g jsou definované na prstencovém okolí bodu a, mají na něm vlastní derivaci a g' je na něm nenulová. Pak*

1. *když $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, tak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$ a*

2. *když $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, tak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661–1704) byl francouzský matematik (l'Hospital je původní ortografie).

Tvrzení (limita derivace). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, funkce $f : [a, a+\delta) \to \mathbb{R}$ je (zprava) spojitá v a, na $(a, a+\delta)$ má vlastní derivaci a $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak i $f'_+(a) = A$. Takže platí záměna pořadí limit*

$$\lim_{x\to a^+} \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x\to a^+} f'(x) =$$
$$= f'_+(a) = \lim_{y\to a^+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \lim_{y\to x} \lim_{x\to a^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ .$$

Důkaz. Nebudeme podrobně dokazovat, důkaz používá Lagrangeovu větu o střední hodnotě. $\square$

Věta (derivace a monotonie). *Nechť je funkce $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a v jeho každém vnitřním bodě má derivaci. Když je $f' \geq 0$, resp. $f' > 0$, na vnitřku J, je f na J neklesající, resp. rostoucí. Podobně když je $f' \leq 0$, resp. $f' < 0$, na vnitřku J, je f na J nerostoucí, resp. klesající.*

Důkaz. Předpokládejme, že třeba $f' < 0$ na vnitřku J, ostatní případy jsou podobné. Když $a, b \in J$, $a < b$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě bod $c \in (a, b)$, že $(f(b)-f(a))/(b-a) = f'(c) < 0$, takže $f(b) < f(a)$. Proto je f na J klesající. $\square$

Uvedeme přehled derivací elementárních funkcí. Odvození vzorců necháváme jako cvičení.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je
$$(e^x)' = e^x \ .$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je
$$(\sin x)' = \cos x \ \text{ a } \ (\cos x)' = -\sin x \ .$$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ je
$$(x^n)' = nx^{n-1} \ .$$
Stejný vzorec platí pro každé $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ a $n \in \mathbb{Z}$, a pro každé $x \in (0, +\infty)$ a $n \in \mathbb{R}$. Také $(\text{konstanta})' \equiv 0$.

4. Pro každé $x \in (0, +\infty)$ je
$$(\log x)' = \frac{1}{x} \ .$$

5. Pro každé $x \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je
$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \ .$$

6. Pro každé $x \in (-1, 1)$ je
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \text{ a } \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

7. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Definice (derivace vyšších řádů). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ je funkce. Položíme $f^{(0)} = f$ a pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in U(a,\delta)$ položíme $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, je-li funkce $f^{(n-1)}$ již definovaná na nějakém okolí bodu x. Funkci (respektive její hodnotu) $f^{(n)}(x)$ nazveme n-tou derivací funkce f v bodě x.*

Hodnota $f^{(n)}(a)$ tedy existuje, právě když všechny funkce $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$ jsou definované na okolí bodu a a
$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}\ .$$

Místo $f^{(n)}$ se pro malé n používá značení pomocí čárek: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ a $f^{(3)} = f'''$ (nebo i pomocí teček). Dále se požívá značení $f^{(n)}(a) = \frac{df^n}{dx^n}(a)$.

Definice (konvexní a konkávní funkce). *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na J konvexní (resp. konkávní), když pro každé tři body $a < b < c$ z J je*
$$f(b) \le f(a) + (f(c) - f(a))\frac{b-a}{c-a}\ \text{(resp. } \dots \ge \dots)\ .$$

Bod $(b, f(b))$ grafu funkce f tedy leží na přímce spojující body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$ grafu nebo pod ní (resp. na ní nebo nad ní). Platí-li ostrá nerovnost, mluvíme o ryzí konvexitě resp. ryzí konkavitě.

Graf konvexní funkce je vydutý dolů, graf konkávní funkce je vydutý nahoru. Následující tvrzení se lehce dokáže, ale důkaz z časových důvodů pomineme.

Tvrzení (konvexita a první derivace). *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, která je na J konvexní nebo konkávní. Pak pro každý vnitřní bod a z J existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.*

Důsledek (konvexita a spojitost). *Funkce konvexní nebo konkávní na intervalu je na něm spojitá.*

Důkaz. Víme, podle Tvrzení o derivaci a spojtosti, že vlastní derivace implikuje spojitost. Totéž, se stejným důkazem, platí i pro jednostranný případ.

Protože funkce je spojitá v bodě, právě když v něm je zleva i zprava spojitá, je f spojitá v a. $\square$

Ilustrací předchozího tvrzení a jeho důsledku je funkce $f(x) = |x|$ v okolí bodu 0 — funkce tam je ryze konvexní, takže má vlastní f'_+ a f'_- a je spojitá. Ovšem f' všude neexistuje, protože $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Následující výsledky o souvislosti konvexity/konkavity a druhé derivace funkce uvedeme bez důkazů.

Věta (konvexita a druhá derivace). *Nechť* $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f'' *existuje na* (a,b) *a* f' *je na* (a,b) *spojitá. Pak*

$$f'' \ge 0 \ (f'' > 0) \text{ na } (a,b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,b) \text{ konvexní (ryze konvexní)}$$

a

$$f'' \le 0 \ (f'' < 0) \text{ na } (a,b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,b) \text{ konkávní (ryze konkávní)}\,.$$

Definice (inflexní bod). *Nechť* $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *a* $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *má v* a *inflexní bod, když existuje vlastní* $f'(a)$ *a graf* f *přechází v okolí* a *z jedné strany tečny na druhou, to jest existuje* δ, $0 < \delta' \le \delta$, *že*

$$x \in (a - \delta', a) \Rightarrow f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$$

a

$$x \in (a, a + \delta') \Rightarrow f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

nebo naopak.

Například $f(x) = x^3$ má v $a = 0$ inflexní bod, protože graf této funkce křižuje v $x = 0$ tečnu $y = 0$. Zhruba řečeno, inflexní bod je ekvivalentní vynulování druhé derivace.

Tvrzení ($f' \ne 0 \Rightarrow$ není inflexe). *Nechť* $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ *a* $f''(a)$ *existuje, ale není* 0. *Pak* f *nemá v* a *inflexní bod.*

Tvrzení ($f' = 0 \Rightarrow$ je inflexe). *Nechť* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f' *je na* (a,b) *spojitá,* $c \in (a,b)$, $f'' < 0$ *na* (a,c) *a* $f'' > 0$ *na* (c,b) *či naopak. Potom je* c *inflexním bodem funkce* f.