# Přednáška 10, 5. prosince 2014

**Tvrzení (limita funkce a uspořádání).** *Funce $f, g, h$ buďte definované na nějakém prstencovém okolí prvku $a \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Když $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ je $f(x) > g(x)$.*
2. *Když existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ je $f(x) \geq g(x)$, pak $\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$, když obě limity existují.*
3. *(dva strážníci) Když $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak i $\lim_{x\to a} g(x) = A$.*

*Důkaz.* Pomineme, velmi podobný důkazu analogických tvrzení pro limity posloupností. □

Následující tvrzení pracuje se skládáním funkcí, což je operace, která pro posloupnosti nemá obdobu.

**Tvrzení (limita složené funkce).** *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce $f$ je definovaná alespoň na prstencovém okolí prvku $A$, $\lim_{x\to A} f(x) = B$, funkce $g$ je definovaná na prstencovém okolí prvku $a$, $\lim_{x\to a} g(x) = A$. Když je splněna jedna z podmínek, že*

1. *$A, B \in \mathbb{R}$, $f$ je v $A$ definovaná a $f(A) = B$ (takže je $f$ v $A$ spojitá) nebo*
2. *existuje $\delta > 0$, že $g(x) \neq A$ pro každé $x \in P(a,\delta)$, pak*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B\ .$$

*Důkaz.* Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů (zatím bez podmínek 1 a 2) existuje $\delta > 0$, že $f(P(A,\delta)) \subset U(B,\varepsilon)$. Pro toto $\delta > 0$ existuje $\theta > 0$, že $g(P(a,\theta)) \subset U(A,\delta)$. Platí-li první podmínka, je dokonce $f(U(A,\delta)) \subset U(B,\varepsilon)$. Tedy $f(g(P(a,\theta))) \subset f(U(A,\delta)) \subset U(B,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. Platí-li druhá podmínka, po případném zmenšení $\theta$ je $g(P(a,\theta)) \subset P(A,\delta)$. Tedy $f(g(P(a,\theta))) \subset f(P(A,\delta)) \subset U(B,\varepsilon)$ a zase $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$. □

**Úloha.** *Co se stane, když ani jedna z obou podmínek věty není splněna?*

**Definice (spojitost na intervalu).** *Nechť* $f:\ I \to \mathbb{R}$, *kde* $I \subset \mathbb{R}$ *je interval (čili neprázdná podmnožina* $\mathbb{R}$*, která s každými dvěma prvky obsahuje i každý třetí ležící mezi nimi). Řekneme, že* $f$ *je na* $I$ *spojitá, když je* $f$ *spojitá v každém bodu* $a \in I$.

**Věta (Darbouxova o mezihodnotě).** *Nechť* $a, b, y \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$$

*je na* $[a, b]$ *spojitá a* $f(a) < y < f(b)$. *Pak existuje* $\alpha \in [a, b]$, *že* $f(\alpha) = y$.

*Důkaz.* Nechť

$$\alpha = \sup(M) = \sup(\{x \in [a, b] \mid f(x) < y\})\ .$$

Jistě $a \in M$ a $b$ je horní mezí $M$, takže definice $\alpha$ je korektní. Ze spojitosti $f$ v $a$ a $b$ plyne, že pro nějaké $\delta > 0$ je $f(x) < y$ na $[a, a + \delta)$ a $f(x) > y$ na $(b - \delta, b]$. Takže $\alpha \neq a, b$ a $\alpha$ je vnitřní bod intervalu $[a, b]$.

Nechť $f(\alpha) \neq y$. Ze spojitosti $f$ v $\alpha$ plyne, že pro nějaké malé $\delta > 0$, $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset [a, b]$, na celém intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ je buď $f(x) < y$ nebo $f(x) > y$. Což je spor s definicí $\alpha$ jakožto suprema — v prvním případě $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset M$ čili $M$ obsahuje čísla větší než $\alpha$ a ve druhém je $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap M = \emptyset$ čili není splněna aproximační vlastnost suprema. Tedy $f(\alpha) = y$. □

Totéž samozřejmě platí, když přepokládáme, že $f(a) > y > f(b)$. Věta nese jméno francouzského matematika *Gastona Darbouxe (1842–1917).*

**Důsledek (obraz intervalu spojitou funkcí).** *Když je* $I \subset \mathbb{R}$ *interval a* $f:\ I \to \mathbb{R}$ *je na* $I$ *spojitá, pak je obraz* $f(I) \subset \mathbb{R}$ *též interval.*

*Důkaz.* Z věty plyne, že když $u, v \in f(I)$, $u < v$ a $u < w < v$, potom $w \in f(I)$. Takže $f(I)$ je interval. □

**Věta (princip maxima).** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *a*

$$f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$$

*je na* $[a, b]$ *spojitá. Pak existuje* $\alpha \in [a, b]$, *že pro každé* $x \in [a, b]$ *je* $f(x) \leq f(\alpha)$ *— funkce* $f$ *na* $[a, b]$ *nabývá v bodě* $\alpha$ *svou největší hodnotu.*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že množina $f([a, b])$ je shora omezená. Kdyby nebyla, měli bychom posloupnost $(x_n) \subset [a, b]$, že $\lim f(x_n) = +\infty$. Podle

B.-W. věty má $(x_n)$ konvergentní podposloupnost. Pro jednoduchost značení ji označíme také $(x_n)$. Tedy $\lim x_n = \alpha \in [a,b]$ (podle Tvrzení o limitě a uspořádání). Protože je ale $f$ v $\alpha$ spojitá, podle Heineho definice limity je $+\infty = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha) \in \mathbb{R}$ — spor. Takže je $f([a,b])$ shora omezená a můžeme definovat

$$c = \sup(f([a,b])) \in \mathbb{R} .$$

Z vlastností suprema plyne, že existuje posloupnost $(x_n) \subset [a,b]$ (označíme ji stejně), že pro každé $n$ je

$$c - 1/n < f(x_n) \leq c .$$

Tato posloupnost má opět podle B.-W. věty konvergentní podposloupnost, kterou opět pro jednoduchost značení označíme stejně, $\lim x_n = \alpha \in [a,b]$. Ze spojitosti $f$ v $\alpha$ a Heineho definice limity je zas

$$c = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha) .$$

Teď nemáme spor, ale ukázali jsme, že funkční hodnota $f(\alpha)$ je $c$, jež je největší ze všech ($c$ je horní mezí množiny $f([a,b])$). $\square$

Podobně se ukáže, že když je $f$ na $[a,b]$ spojitá, nabývá tam svou nejmenší hodnotu. Intervaly typu $[a,b]$ se nazývají *kompaktní*. Pro jiné intervaly princip maxima neplatí, např. $f(x) = 1/x : (0,1] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $(0,1]$ spojitá, ale nenabývá na něm největší hodnotu. Snadno se na příkladu ukáže, že spojitost je podstatná, funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = x$ pro $0 \leq x < 1$ a $f(1) = 0$, která na intervalu $[0,1]$ není spojitá, na $[0,1]$ nenabývá největší hodnotu, i když to je kompaktní interval.

Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ prostá funkce, je definovaná její *inverzní funkce* $f^{-1} : f(M) \to M$, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Připomeňme si, že $f : M \to \mathbb{R}$ je *rostoucí*, resp. *klesající* (na množině $M$), když $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp. $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Při neostrých nerovnostech dostáváme *neklesající*, resp. *nerostoucí* funkci.

**Tvrzení (spojitost inverzní funkce).** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : J \to \mathbb{R}$ je rostoucí (resp. klesající) funkce, jež je na $J$ spojitá. Pak je inverzní funkce*

$$f^{-1} : K = f(J) \to \mathbb{R}$$

*na intervalu $K$ spojitá a rostoucí (resp. klesající).*

*Důkaz.* Z časových důvodů pomineme. □

Operace zachovávající spojitost funkce tedy jsou: aritmetické operace $+, -, \times, /$, skládání funkcí a invertování funkcí. Přesněji: když jsou funkce $f, g$ definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a jsou v $a$ spojité, pak jsou v okolí bodu $a$ definované a v $a$ spojité i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ a, pokud $g(a) \neq 0$, i $f(x)/g(x)$. To plyne z Tvrzení o aritmetice limit funkcí. Dále, je-li $g$ definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, $f$ na okolí bodu $g(a)$, $g$ je spojitá v $a$ a $f$ v $g(a)$, pak je složená funkce $f(g(x))$ definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a v $a$ spojitá. To plyne z Tvrzení o limitě složené funkce. O spojitosti inverzní funkce hovoří předchozí tvrzení.

**Tvrzení (třídy spojitých funkcí).** *Následující funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru: polynomy, racionální funkce (podíly polynomů),* $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$.

*Důkaz.* Polynomy a racionální funkce se dostanou z konstantní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ a identické funkce $f(x) = x$, jež jsou zjevně spojité na $\mathbb{R}$, aritmetickými operacemi. Exponenciála je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, protože

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| < 2e^a|x - a|, \quad \text{když} \quad |x - a| < 1/2\ ,$$

jak plyne z rozvoje $e^{x-a}$ do řady. Funkce $\log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na $(0, +\infty)$ spojitá podle Tvrzení o spojitost inverzní funkce. Spojitost funkcí $\sin x$ a $\cos x$ plyne podobně z rozvoje do řady. □

Aplikací aritmetických operací, skládání a invertování vyrobíme z těchto funkcí spoustu dalších spojitých funkcí. Třeba

$$\sqrt{1 - x^2} = e^{(1/2)\log(1-x^2)}$$

je spojitá na svém definičním oboru $[-1, 1]$ atd.