Sedmá série domácích úkolů

Příklad 1. Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že množina hran $M \subseteq E$ tvoří *maximální párování*, pokud M je párování a pokud pro libovolnou hranu $e \in E \setminus M$ platí, že $M \cup \{e\}$ není párování. Označme $m(G)$ velikost největšího párování v G a $m^*(G)$ velikost nejmenšího maximálního párování v G. Dokažte, že pro každý graf G platí $m(G) \leq 2m^*(G)$ a že existují grafy, pro které platí $m(G) = 2m^*(G)$.

Příklad 2. Nechť G je bipartitní graf, jehož každý vrchol má stupeň nejvýš d. Ukažte, že hrany G lze obarvit pomocí nejvýše d barev tak, že žádné dvě hrany sdílející společný vrchol nemají stejnou barvu. (Můžete k řešení využít výsledek ze cvičení, kde se toto tvrzení dokázalo pro d-regulární bipartitní grafy. Můžete například postupovat tak, že ukážete, že bipartitiní graf, jehož vrcholy mají stupeň nejvýš d se dá vhodným přídáním vrcholů a hran doplnit na d-regulární.)

Příklad 3. Dokažte následující 'Tutteovu větu s deficitem': Nechť $G = (V, E)$ je graf a nechť pro libovolnou množinu $W \subseteq V$ platí, že graf $G - W$ má nejvýš $|W| + 10$ komponent s lichým počtem vrcholů. Potom G má párování, jehož hrany obsahují dohromady alespoň $|V| - 10$ vrcholů G. Pokud vám to k důkazu pomůže, můžete předpokládat, že G má sudý počet vrcholů.