Obsah cvičení 9. ledna 2012

Příklad: dokažte, že funkce z množiny $\{1\} \cup \{\sin(nx), \cos(nx); n \in \mathbb{N}\}$ jsou navzájem ortogonální a spočítejte jejich normy.

Připomenutí věty o záměně (stejnoměrné) limity a Riemannova integrálu, ve verzi pro posloupnosti a pro řady. Zdůvodnění, že verze pro řady plyne z verze pro posloupnosti.

Příklad: najděte příklad posloupnosti funkcí f_n na kompaktním intervalu $[a, b]$ takových, že f_n konvergují k limitě f lokálně stejnoměrně na (a, b), ale $\int_a^b f_n$ nekonvergují k $\int_a^b f$.

Příklad: ukažte, že pokud trigonometrická řada $\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$ konverguje k limitě f stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$, pak tato řada je Fourierovou řadou f, tj. platí $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$ a $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$.

Připomenutí Weierstrassovy věty (o posloupnosti derivací), ukázka použití pro záměnu derivace a limity a pro záměnu primitivní funkce a limity.

Příklad: rozhodněte, v kterém bodě má derivaci funkce $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.