Lineární algebra II, čtvrtá série domácích úkolů
Termín odevzdání: 3. 5.

Příklad 1. (3 body) Nechť x, y, z jsou reálná čísla, nechť $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ je matice tvaru 2×2. Popište, pro které hodnoty $x, y, z \in \mathbb{R}$ má matice A dva reálné vlastní vektory, které jsou na sebe kolmé.

Příklad 2. Označme $\mathbb{R}^\infty$ prostor všech posloupností reálných čísel (indexovaných od nuly). Pro posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2 \dots)$ definujeme 'posunutou' posloupost $P(a) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Na cvičení jsme si ukázali, že P je lineární zobrazení a že libovolné reálné číslo je vlastním číslem zobrazení P, přičemž vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{R}$ odpovídá vlastní vektor $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ (nebo nějaký nenulový skalární násobek tohoto vektoru).

Definujme množinu $M \subset \mathbb{R}^\infty$ jako množinu všech posloupností $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ splňujících vztah

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \text{ pro každé } n \geq 2.$$

a) (1 bod) Ukažte, že posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ patří do M, právě když $P(P(a)) = \frac{1}{2}(P(a) + a)$.

b) (1 bod) Ukažte, že M je vektorový podprostor $\mathbb{R}^\infty$. (Můžete přitom využít fakt, že P je lineární zobrazení, což jsme dokázali na cvičení.)

c) (2 body) Najděte dva lineárně nezávislé vlastní vektory v a w zobrazení P, které oba patří do M.

d) (5 bodů) Definujme posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in M$ pomocí následující rekurence:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\pi} \\ a_1 &= 2873.34 \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \text{ pro každé } n \geq 2. \end{aligned}$$

Vyjádřete a jako lineární kombinaci vlastních vektorů v a w. Pomocí tohoto vyjádření odvoďte vzorec v uzavřeném tvaru pro a_n. Pomocí tohoto vzorce najděte limitu posloupnosti a.

Příklad 3. (3 body) Najděte dvě reálné matice tvaru 2×2, které jsou obě symetrické, ale jejich součin není symetrický.

Příklad 4. Nechť A je reálná matice tvaru $m \times n$ (tj. A má m řádků a n sloupců). Nechť A^{T} označuje transpozici matice A. Definujme matici B tvaru $n \times n$ jako součin $B = (A^{\mathrm{T}})A$.

a) (3 body) Ukažte, že matice B je pozitivně semidefinitní.

b) (3 body) Ukažte, že pokud má matice A hodnost n, pak B je pozitivně definitní.

(Nezapomeňte ověřit, že B je symetrická matice.)