

Vyřešené příklady dodejte nejpozději do začátku cvičení v pátek 13. dubna 2007.

- 3 1. Dokažte, že existuje  $n$  takové, že libovolná množina  $n$  bodů v rovině obsahuje buď 1000 bodů ležících na společné přímce nebo 1000 bodů z nichž žádné tři neleží na stejné přímce. (Rovinou se zde myslí obyčejná euklidovská rovina  $\mathbb{R}^2$ , a pojmy ‘přímka’ a ‘bod’ mají také svůj obvyklý geometrický význam.)
2. Připomeňme si, že projektivní rovina je množinový systém  $(X, \mathcal{P})$ , kde prvky  $X$  nazýváme *body* a prvky  $\mathcal{P}$  *přímky*, přičemž platí následující trojice axiomů:
- 1) Pro každé dva různé body  $x, y \in X$  existuje právě jedna přímka  $P \in \mathcal{P}$  která tyto dva body obsahuje.
  - 2) Každé dvě různé přímky  $P, Q \in \mathcal{P}$  mají právě jeden společný bod.
  - 3) V množině  $X$  existuje čtveřice bodů, z nichž žádné tři neleží na společné přímce z  $\mathcal{P}$ .
- 2 (a) Dokažte, že třetí axiom lze nahradit tvrzením, že v  $\mathcal{P}$  jsou aspoň dvě různé přímky, které mají velikost aspoň 3. (Tj. dokažte, že modifikovaná trojice axiomů je ekvivalentní původní trojici.)
- 2 (b) Dokažte, že třetí axiom lze nahradit tvrzením, že pro každé dvě přímky z  $\mathcal{P}$  existuje bod, který neleží ani na jedné z nich.
- 1+2+2 (c) Najděte množinový systém  $(X, \mathcal{P})$  s alespoň čtyřmi body, který splňuje první dva axiomy, ale není to projektivní rovina (1 bod). Nejděte nekonečně mnoho navzájem neizomorfních takových systémů (2 body navíc). Popište všechny takové systémy, které mají  $X$  i  $\mathcal{P}$  konečné (další 2 body, ovšem pouze pokud dokážete, že jste našli všechna řešení).
- 1 3. Dokažte, že pro každé dva různé body v projektivní rovině existuje přímka, která prochází právě jedním z nich.
- 2 4. Dokažte, že Fanova rovina je jediná projektivní rovina řádu 2 (až na izomorfismus).
- 4 5. Dokažte, že existuje  $n$  takové, že v každé projektivní rovině řádu aspoň  $n$  lze vybrat 1000 bodů z nichž žádné tři neleží na společné přímce. (Nápověda: hledejte hladově)