

## Bodované domácí úkoly — 2. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpověď musíte zdůvodnit.

- 2 1. Kolika způsoby lze na šachovnici velikosti  $n \times n$  rozmístit  $k$  šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly? Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci.
2. Mravenec stojí v levém dolním rohu obdélníkové desky vysoké  $n$  milimetrů a široké  $m$  milimetrů. V každém kroku se mravenec přesune buď o jeden milimetr směrem vzhůru nebo o jeden milimetr směrem doprava, takže po  $n + m$  krocích skončí v pravém horním rohu.
- 1 (a) Kolika různými způsoby může mravenec dojít do cíle?
- 2 (b) Kolika způsoby může mravenec dojít do cíle, jestliže mezi každými dvěma kroky doprava provede aspoň jeden krok vzhůru? (Výsledek vyjádřete v uzavřeném tvaru pomocí jednoho kombinačního čísla.)
- 4 (c) Kolika způsoby může mravenec dojít do cíle, jestliže nikdy neudělá více než tři kroky doprava v řadě po sobě? (Vyjádřete výsledek pomocí inkluze a exkluze.)
3. Kolik řešení má rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$ , pokud
- 2 (a)  $\forall i: x_i \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- 2 (b)  $\forall i: x_i \in \mathbb{N}$ , kde  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- 1 (c)  $\forall i: x_i \in \mathbb{N}_0$ , navíc  $x_1 \geq 10$ .
- 3 (d)  $\forall i: x_i \in \{0, 1, \dots, 400\}$  (použijte princip inkluze a exkluze).
- V řešení záleží na pořadí sčítanců, tj. například  $800+200+0+0$  je jiné řešení než  $0+800+0+200$ .
- 3 4. V restauraci sedí u kulatého stolu  $n$  hostů. Každý z nich si chce objednat jedno ze tří nabízených jídel, a to tak, aby žádní dva jedlíci sedící vedle sebe neměli stejné jídlo. Kolika způsoby to mohou udělat?
- 3 5. Kolik existuje grafů na  $n$  vrcholech, které neobsahují žádný vrchol stupně 0?