Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

8. 7. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(5 bodů)* Napište definici pojmů *otevřená množina*, *uzavřená množina* a *kompaktní množina*, kde uvažované množiny jsou podmnožiny $\mathbb{R}$.
2. *(10 bodů)* Dokažte, že každá omezená monotónní posloupnost reálných čísel je konvergentní.
3. *(10 bodů)* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, v níž každý sčítanec je nezáporné reálné číslo. Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost splňující $0 \le b_n \le a_n$ pro každé n. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je také konvergentní řada.
4. *(5 bodů)* Spočítejte, v závislosti na parametru $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, čemu se rovná
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^r)}{x}.$$
5. *(10 bodů)* Zformulujte a dokažte větu o nabývání maxima pro spojité funkce na kompaktním intervalu.
6. *(10 bodů)* Nechť f a g jsou dvě spojité funkce na intervalu $[0, 1]$. Předpokládejme, že platí $f(0) < g(0)$ a $f(1) > g(1)$. Dokažte, že existuje $b \in [0, 1]$, pro nějž platí $f(b) = g(b)$.
7. *(15 bodů)* Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^3|2x + 3|$: určete definiční obor, obor hodnot, intervaly monotonie, lokální i globální extrémy a intervaly konvexity a konkávnosti. Na základě těchto poznatků načrtněte graf funkce.
8. *(5 bodů)* Definujte, co je horní a dolní Riemannova suma a co je horní a dolní Riemannův integrál.
9. *(10 bodů)* Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[0, 1]$ následovně: pro každé přirozené číslo $n \ge 1$ je f na intervalu $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ konstantní a je tam rovna $\frac{1}{n+1}$ (viz graf na následujícím obrázku). Dodefinujme $f(0) = 0$. Dokažte, že tato funkce je na $[0, 1]$ riemannovsky integrovatelná.