1 Číselné obory a jejich vlastnosti

Známe následující číselné obory:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} && \text{přirozená čísla}\\
&\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} && \\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{celá čísla}\\
&\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} && \text{racionální čísla}
\end{aligned}
$$

A víme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Můžeme říci, že množina $\mathbb{Q}$ je „větší“ než množina $\mathbb{N}$? Obě mají nekonečně mnoho prvků. *Mohutnost množiny* je pojem pro velikost množiny. V případě konečných množin je to počet prvků.

Definice 1.1. Dvě množiny M a N mají stejnou *mohutnost*, pokud existuje bijekce z A do B. Množina M je *spočetná* pokud má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Množina je *nejvýše spočetná*, pokud je spočetná nebo konečná. Pokud není množina nejvýše spočetná, pak je *nespočetná*.

Platí, že každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná. Spočetné množiny jsou tedy, neformálně řečeno, nejmenší nekonečné množiny.

Snadno nahlédneme, že množina celých čísel je spočetná, stačí ji přeuspořádat: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$. Množina racionálních čísel je také spočetná, potřebnou bijekci lze zkonstruovat seřazením zlomků v základním tvaru v pořadí, v jakém je prochází šipka na Obrázku 1.1.

Alternativně můžeme každé racionální číslo reprezentovat *desetinným rozvojem*. Tento desetinný rozvoj bude vždy konečný nebo periodický.

Pomocí desetinných rozvojů si zavedeme (ne zcela formálně) reálná čísla.

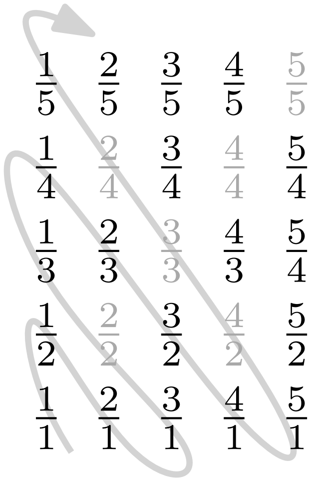
Definice 1.2. *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ je tvořena všemi desetinnými rozvoji

$$\pm d_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

kde $d_0 \in \mathbb{N}_0$ a $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$, přičemž jednomu reálnému číslu může odpovídat více než jeden desetinný rozvoj: například $+0,000\ldots = -0,000\ldots$ a $1,000\ldots = 0,999\ldots$.

Čísla v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *iracionální*. Bez důkazu si uveďme jeden příklad iracionálního čísla.

Fakt 1.3 (Iracionalita $\sqrt{2}$). *$\sqrt{2}$ je iracionální.*



Obrázek 1.1: Bijekce mezi přirozenými čísly a zlomky v základním tvaru.

Věta 1.4 (Nespočetnost reálných čísel.)**.** *Množina reálných čísel není spočetná.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ všech reálných čísel. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ si jako $a_n(m)$ označíme m-tou cifru za desetinnou čárkou v dekadickém rozvoji čísla a_n; má-li rozvoj jen konečně mnoho cifer za desetinnou čárkou, doplníme je nekonečně mnoho nulami, a v případě dvojznačného dekadického rozvoje volíme rozvoj s konečně mnoha devítkami. Číslo α pak definujeme dekadickým rozvojem

$$\alpha = 0, b_1 b_2 b_3 \dots,$$

kde n-tá cifra b_n je nejmenší nenulová číslice různá od $a_n(n)$. V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka nebo nula, a je tedy jednoznačný. Dále $b_n \neq a_n(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s předpokladem, že posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ obsahuje všechna reálná čísla. $\square$

Dále ještě máme obor komplexních čísel $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, zabývat se jimi budeme pouze okrajově. Množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou (algebraická) *tělesa.*

Definice 1.5. Pojmem *uspořádané těleso* označujeme dvojici $(T, <)$, kde T je těleso a relace $<$ je lineární uspořádání splňující tyto vlastnosti:

- $\forall a, b, c \in T\colon a < b \implies a + c < b + c$
- $\forall a, b, c \in T\colon a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc.$

Vidíme, že $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ spolu se svým obvyklým uspořádáním tvoří uspořádané těleso. Dá se dokázat, že na $\mathbb{C}$ nelze definovat žádné uspořádání tak, aby vzniklo uspořádané těleso.

Definice 1.6. Nechť U ('univerzum') je množina s uspořádáním $\preceq$ a nechť $A \subseteq U$.

- Množina A je *shora omezená* pokud existuje $m \in U$ takové, že $a \preceq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *horní závora* (nebo *horní mez*) množiny A.
- Prvek $m \in U$ je *supremum* množiny A, pokud m je nejmenší horní závora A. Zapisujeme $m = \sup A$.
- Prvek m je *maximum* (nebo *největší prvek*) množiny A, pokud m je horní závora A a zároveň $m \in A$. Zapisujeme $m = \max A$.
- Množina A je *zdola omezená* pokud existuje $m \in U$ takové, že $a \succeq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *dolní závora (dolní mez)* množiny A.
- Prvek $m \in U$ je *infimum* množiny A, pokud m je největší dolní závora A. Zapisujeme $m = \inf A$.
- Prvek m je *minimum* (nebo *nejmenší prvek*) množiny A, pokud m je dolní závora A a zároveň $m \in A$. Zapisujeme $m = \min A$.
- Množina A je *omezená* pokud je shora a zdola omezená.

Obecně neplatí, že shora omezená množina musí mít maximum a supremum. Pokud maximum existuje, existuje i supremum a jsou si rovny. Totéž platí pro infimum a minimum.

Příklad 1.7. Nechť $U = \mathbb{R}$ a A je interval $(0, 1]$. Pak A má největší prvek 1, který je tedy zároveň supremum, a jakékoliv $x \geq 1$ je horní mez A. A nemá nejmenší prvek, ale má infimum rovné 0. Každé číslo menší nebo rovné 0 je dolní mez A.

Příklad 1.8. Nechť A je množina racionálních čísel q splňujících $q^2 < 2$. Tato množina je omezená, každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ (například 2) je její horní závora. Uvažujeme-li $U = \mathbb{Q}$, pak tato množina nemá supremum, protože každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ je horní mez a žádná horní mez není nejmenší. Uvažujeme-li tutéž množinu A jako podmnožinu $U = \mathbb{R}$, pak její supremum je $\sqrt{2}$.

Předchozí příklad ukazuje, že existence suprema (a ovšem i infima) dané množiny závisí obecně na tom, v jakém univerzu množinu uvažujeme. Ve zbytku semestru pro nás bude roli univerza hrát množina $\mathbb{R}$ s obvyklým uspořádáním, nebude-li výslovně uvedeno jinak.

Věta 1.9. *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*

Větu nebudeme dokazovat, ale zmíníme její lehký důsledek:

Tvrzení 1.10. *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Důkaz. Volme neprázdnou zdola omezenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$. Snadno nahlédneme, že množina $-A = \{-x;\ x \in A\}$ je neprázdná a shora omezená, má tedy supremum s podle předchozí věty. Lehce ověříme, že $-s$ je potom infimum A. $\square$

Definice 1.11. Absolutní hodnota reálného čísla $a \in \mathbb{R}$ je definována

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost daného reálného čísla od nuly. Obecně, pro dvě reálná čísla x a y odpovídá hodnota $|x - y|$ vzdálenosti mezi x a y na reálné ose. Reálná čísla s absolutní hodnotou jsou prvním příkladem *metrického prostoru*, který potkáváme.

Definice 1.12. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a $d\colon M \times M \to [0, \infty)$ je funkce taková, že pro každé $x, y \in M$ platí

(i) $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ a

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $z \in M$.

Funkci d nazýváme *metrika na* M. Podmínka (iii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost.*

Funkce $d(x, y) = |x - y|$ (pro $x, y \in \mathbb{R}$) zřejmě splňuje první dvě podmínky. Z následující věty plyne, že funkce $|x - y|$ splňuje i třetí podmínku (dosazením $a = x - z$ a $b = z - y$).

Věta 1.13 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé* $a, b \in \mathbb{R}$ *platí, že* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Důkaz. Cvičení. □

Zobecněním této metriky je *eukleidovská metrika* v prostoru $\mathbb{R}^d$, definovaná pro dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, vzorcem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}.$$

Na závěr uvedeme ještě další důležitou nerovnost.

Věta 1.14 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro každé reálné číslo* $x \geq -1$ *a celé číslo* $n \geq 0$ *platí*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ zjevně platí. Platí-li pro n, s využitím nerovnosti $1+x \geq 0$ dostaneme

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

což je Bernoulliova nerovnost pro $n + 1$. □