Devátá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 5. prosince. Řešení dodejte nejpozději v úterý 11. prosince.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad. [2 body za každé tvrzení]

(a) Jestliže G je graf, jehož každý vrchol má stupeň aspoň 2, tak každý vrchol G patří do nějaké kružnice obsažené v G.

(b) Jestliže T a T' jsou dva stromy se stejným počtem vrcholů, tak průměrný stupeň vrcholů v T je stejný jako průměrný stupeň vrcholů v T'.

(c) Jestliže graf G obsahuje nějakou kružnici liché délky jako podgraf, tak G také obsahuje nějakou kružnici liché délky jako indukovaný podgraf.

(d) Jestliže graf G obsahuje nějakou kružnici sudé délky jako podgraf, tak G také obsahuje nějakou kružnici sudé délky jako indukovaný podgraf.

Příklad 2. Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje graf $G = (V, E)$ s aspoň jednou hranou, jehož každý bipartitní podgraf má nejvýše $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)|E|$ hran. [4 body] *Zdá-li se vám tento příklad těžký, dokažte aspoň výše uvedené tvrzení pro nějaké konkrétní $\varepsilon > 0$. Čím menší ε, tím více bodů dostanete.*

Příklad 3. Dokažte, že libovolný graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $|E|/2$ hranami. [3 body] *Nápověda: dokažte třeba, že vrcholy G lze rozdělit do dvou skupin tak, že každý vrchol bude mít aspoň tolik sousedů v opačné skupině jako ve své vlastní; z toho pak snadno odvodíte požadované tvrzení.*