Pátá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 7. listopadu. Řešení dodejte nejpozději v úterý 13. listopadu.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Dokažte (nejlépe pomocí vhodné kombinatorické interpretace) následující tvrzení. [3 body za každé tvrzení]

(a) Pro každé $n \geq 1$ platí, že množina $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti.

(b) Pro každé přirozené n platí
$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(c) Pro každá tři přirozená čísla $k \leq m \leq n$ platí
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

Příklad 2. Nechť n je přirozené číslo. Kolik existuje uspořádaných trojic množin (A, B, C) splňujících
$$A \subseteq B \subseteq C \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}?$$

Vyjádřete odpověď co nejjednodušším vzorečkem. [3 body]

Příklad 3. Nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Kolik existuje funkcí z množiny $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ do množiny $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ takových, že na každý prvek B se zobrazí právě dva různé prvky A? [3 body]

Pro kontrolu podotkněme, že pro $n = 2$ vyhovuje zadání této úlohy následujících šest funkcí:

- $f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 1$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 1$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 1$