

Druhá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady pošlete mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 17. října. Řešení dodejte nejpozději v úterý 23. října.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Symbol $\mathcal{P}(X)$ označuje potenční množinu množiny X , symbol \mathbb{N} označuje množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$ přirozených čísel, symbol \mathbb{R} množinu reálných čísel, symbol \mathbb{Z}^+ množinu kladných celých čísel.

Dokažte následující tvrzení. [5 bodů za každé tvrzení]

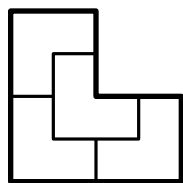
Tvrzení 1. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

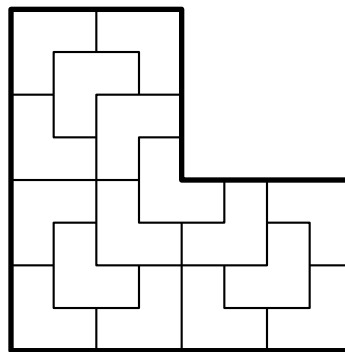
Tvrzení 2. Pro každé celé číslo $k \geq 2$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}.$$

Tvrzení 3. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Mějme arch papíru ve tvaru písmene L, který vznikl ze čtvercového archu o rozměrech $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ tak, že jsme odstranili pravou horní čtvrtinu o rozměrech $2^n \times 2^n$. Takovýto arch lze rozstříhat na dílky ve tvaru L (případně pootočené), které vypadají jako čtverec o rozměru 2×2 , z něž se odstranil čtvereček o rozměru 1×1 . Následující obrázek ukazuje příklady takového rozstříhání pro $n = 1$ a $n = 2$.



$n = 1$



$n = 2$