První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro úterní cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v pondělí 23. října.

Počet lichých komponent grafu G značím $\mathrm{odd}(G)$. *Izolovaný vrchol* v nějakém grafu je vrchol stupně 0.

Příklad 1. Najděte 5-regulární vrcholově 2-souvislý graf, který neobsahuje perfektní párování [2 body].

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf a nechť $\mu(G)$ označuje velikost největšího párování v grafu G. Řekneme, že párování P grafu G je *maximální*, pokud pro každou nepárovací hranu $e \in E \setminus P$ platí, že $P \cup \{e\}$ není párování. Dokažte, že každé maximální párování grafu G má aspoň $\frac{1}{2}\mu(G)$ hran. [2 body]

Příklad 3. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že G má perfektní párování, právě když pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že v grafu $G - S$ je nejvýš $|S|$ izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je graf s lichým počtem vrcholů. Řekneme, že párování M v grafu G je *skoro perfektní*, pokud M má jen jeden volný vrchol. Dokažte, že G má skoro perfektní párování, právě když pro každou množinu vrcholů $S \subseteq V$ platí, že $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + 1$. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body] *(Nápověda: můžete třeba ukázat, že existence skoro perfektního párování v G je ekvivalentní existenci perfektního párování v nějakém jiném vhodně definovaném grafu G'.)*

Příklad 5. Nechť n je sudé číslo. Dokažte, že každý graf na n vrcholech s více než $\binom{n-1}{2}$ hranami má perfektní párování. [3 body] *(Nápověda: můžete třeba využít poznatek ze cvičení, že graf K_n má přesně* $(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 1$ *perfektních párování a libovolná jeho hrana je obsažená v přesně* $(n-3)(n-5)\cdots 1$ *perfektních párováních.)*