Řešení příkladů na procvičení

U některých příkladů existují i jiná správná řešení

- Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\colon \big((\forall y \in \mathbb{R}\colon x > y) \implies x > 10\big)$
   Platí, protože levá strana implikace, tj. $(\forall y \in \mathbb{R}\colon x > y)$, je nepravdivá pro libovolné x, tedy celá implikace je pravdivá pro libovolné x.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\colon \big((\exists y \in \mathbb{R}\colon x > y) \implies x > 10\big)$
   Neplatí, protože levá strana implikace je pravdivá pro libovolné x, zatímco pravá strana je pravdivá jen pro $x > 10$, celá implikace je tedy pravdivá jen pro $x > 10$, není tedy pravdivá pro všechna x.
3. $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists y \in \mathbb{R}\colon (x > y \implies x > 10)$
   Platí, protože bez ohledu na hodnotu x můžeme za y zvolit např. hodnotu 10, a potom bude implikace pravdivá.
4. $\exists y \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon (x > y \implies x > 10)$
   Platí, ze stejných důvodů jako předchozí příklad.
5. $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon (x > y \implies x > 10)$
   Neplatí, protože např. pro $x = 1$ a $y = 0$ je implikace nepravdivá.
6. $\exists y \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon \big((\exists z \in \mathbb{R}\colon x > z \,\&\, z > y) \implies x > 10\big)$
   Platí. Můžeme si například všimnout, že predikát $(\exists z \in \mathbb{R}\colon x > z \,\&\, z > y)$ je pravdivý, právě když $x > y$, čímž se celé tvrzení zjednoduší na tvrzení z bodu 4.
7. $\exists y \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon \big((\exists z \in \mathbb{R}\colon x > z) \,\&\, (\exists z \in \mathbb{R}\colon z > y) \implies x > 10\big)$
   Neplatí. Predikát $(\exists z \in \mathbb{R}\colon x > z)$ je pravdivý pro libovolné x a y a predikát $(\exists z \in \mathbb{R}\colon z > y)$ také, takže levá strana implikace je pravdivá pro všechna x a y, ovšem pravá strana jen pro $x > 10$, celá implikace je tedy pravdivá jen pro $x > 10$ (bez ohledu na y), není tedy pravdivá pro všechna x.

- Najděte dva predikáty $P(x)$ a $Q(x)$ pro reálná čísla tak, aby tvrzení $\exists x \in \mathbb{R}\colon (P(x) \implies Q(x))$ bylo pravdivé, a zároveň tvrzení $(\exists x \in \mathbb{R}\colon P(x)) \implies (\exists x \in \mathbb{R}\colon Q(x))$ bylo nepravdivé.

Zde stačí za $P(x)$ vzít predikát, který je pro aspoň jednu hodnotu x pravdivý, ale není pravdivý pro všechna x, a za $Q(x)$ vzít predikát, který je pro všechna x nepravdivý.

- Zapište následující tvrzení pomocí kvantifikátorů a logických spojek.

1. Pokud má každé číslo z množiny A alespoň jednoho dělitele většího než 12, pak množina A obsahuje aspoň jeden prvek větší než 42.
   $$(\forall n \in A\colon \exists d \in \mathbb{N}\colon d > 12 \,\&\, d|n) \implies (\exists m \in A\colon m > 42)$$
2. Každé přirozené číslo x má nějakého dělitele, který je menší než pět a který není dělitelem žádného přirozeného čísla menšího než x.
   $$\forall x \in \mathbb{N}\colon \exists d \in \mathbb{N}\colon \big(d < 5 \,\&\, \forall y \in \mathbb{N}\colon (y < x \implies \neg(d|y))\big)$$
3. Pro každé přirozené číslo n platí, že pokud je n sudé, pak $(n-1)^2$ je liché.
   $$\forall n \in \mathbb{N}\colon \big(2|n \implies \neg(2|(n-1)^2)\big)$$
4. Každé číslo z množiny A, které je sudé a větší než 15, je dělitelné libovolným prvkem množiny B.
   $$\forall n \in A\colon \big((2|n \,\&\, n > 15) \implies (\forall m \in B\colon m|n)\big)$$
5. Žádné přirozené číslo, které má aspoň jednoho dělitele většího než 12, nepatří do množiny A.
   $$\forall n \in \mathbb{N}\colon \big((\exists d \in \mathbb{N}\colon d|n \,\&\, d > 12) \implies n \notin A\big)$$
6. Jestliže existuje přirozené číslo dělitelné všemi prvky z množiny A, pak také existuje přirozené číslo dělitelné aspoň jedním prvkem množiny B.
   $$(\exists n \in \mathbb{N}\colon \forall m \in A\colon m|n) \implies (\exists k \in \mathbb{N}\colon \exists \ell \in B\colon \ell|k)$$
7. Žádné číslo z množiny A není větší než všechna čísla z množiny B.
   $$\forall x \in A\colon \neg\,(\forall y \in B\colon x > y) \quad \text{nebo ekvivalentně} \quad \forall x \in A\colon \exists y \in B\colon x \le y$$
8. Pokud je každé číslo z množiny A sudé, tak žádné číslo z množiny B není větší než 3.
   $$(\forall n \in A\colon 2|n) \implies (\forall m \in B\colon m \le 3)$$

- Zformulujte obměnu a negaci následujících tvrzení:

1. Pokud je x násobek 6 a y násobek 7, pak $x * y$ je sudé. Obměna: Pokud je $x * y$ liché, tak x není násobek 6 nebo y není násobek 7. Negace: Číslo x je násobek 6, číslo y je násobek 7 a $x * y$ není sudé.
2. Pokud je p prvočíslo, pak $p = 2$ nebo p je liché. O: Pokud $p \neq 2$ a p není liché, pak p není prvočíslo. N: Číslo p je prvočíslo a zároveň $p \neq 2$ a p není liché.
3. Pokud jsem v minulém roce každý den cvičil a každý měsíc šel aspoň jednou do posilovny, jsem v dobré kondici. O: Pokud nejsem v dobré kondici, pak jsem v minulém roce aspoň jeden den necvičil, nebo v aspoň jednom měsíci nešel ani jednou do posilovny. N: V minulém roce jsem každý den cvičil a každý měsíc šel aspoň jednou do posilovny, ale nejsem v dobré kondici.
4. Pokud je n přirozené číslo, pak číslo $\sqrt{n}$ je přirozené nebo iracionální. O: Pokud číslo $\sqrt{n}$ není ani přirozené ani iracionální, pak n není přirozené. N: Číslo n je přirozené a zároveň číslo $\sqrt{n}$ není ani přirozené ani iracionální.