Šestá série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v úterý 5. června. Správný postup řešení bude následně zveřejněn na webu cvičení.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

$\boxed{2}$ 1. Dokažte, že každá nekonečná spočetná částečně uspořádaná množina obsahuje nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

$\boxed{2}$ 2. Najděte nekonečnou částečně uspořádanou množinu, která pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje řetězec délky k, ale neobsahuje nekonečný řetězec. Najděte také nekonečnou částečně uspořádanou množinu, která pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje antiřetězec délky k, ale neobsahuje nekonečný antiřetězec.

$\boxed{3}$ 3. Nechť G je nekonečný graf na množině vrcholů $\mathbb{N}$. Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že G obsahuje cestu délky k s počátkem ve vrcholu 1. Předpokládejme, že všechny vrcholy grafu G mají konečný stupeň. Dokažte, že G obsahuje nekonečnou cestu začínající ve vrcholu 1.

$\boxed{1}$ 4. Najděte nekonečný graf G na množině vrcholů $\mathbb{N}$ takový, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že G obsahuje cestu délky k s počátkem ve vrcholu 1, ale přitom G neobsahuje žádnou nekonečnou cestu.

$\boxed{1}$ 5. Najděte nekonečný graf G na množině vrcholů $\mathbb{N}$ takový, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že G obsahuje cestu délky k (ne nutně s počátkem ve vrcholu 1), navíc všechny vrcholy G mají konečný stupeň, a přitom G neobsahuje žádnou nekonečnou cestu.

6. Pro následující dva příklady lineárních kódů zjistěte jejich dimenzi, jejich minimální vzdálenost, popište jejich ortogonální doplněk a uveďte příklad jejich generující a kontrolní matice.

$\boxed{2}$ (a) $C_a = \{(0000), (1100), (0011), (1111)\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$.

$\boxed{3}$ (b) $C_b = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_3 + x_4) \in \mathbb{Z}_2^7;\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_2\}$.

$\boxed{4}$ 7. Pro jaké nejmenší n existuje nějaký $(n, 4, 3)$-kód? A pro jaké nejmenší n existuje nějaký $(n, 3, 3)$-kód? Pokud neumíte najít přesnou hodnotu n, najděte aspoň co nejlepší horní a dolní odhad. Uvažujeme jen kódy nad abecedou $\mathbb{Z}_2$.