

Příklady ze cvičení z KGI

středa 25. 4.

1. Na mariášovém turnaji se každé partie účastní tři hráči. Kolik bylo na turnaji celkem sehráno partií v následujících případech:
 - (a) Turnaj má 12 účastníků a každý účastník sehrál 5 partií.
 - (b) Turnaj má 32 účastníků, 12 z nich sehrálo pět partií, 20 z nich sehrálo šest partií.
 - (c) Turnaj má 15 účastníků a každá dvojice účastníků se setkala v právě jedné společné partii.
2. Celkem s studentů psalo test, který měl celkem p příkladů. Každý student vyřešil aspoň $p/3$ příkladů. Dokažte, že existuje příklad, který vyřešilo aspoň $s/3$ studentů.
3. Jak víme, každé hranové 2-obarvení grafu K_6 obsahuje jednobarevný trojúhelník. Mějme hranové 2-obarvení grafu K_N pro $N \geq 6$. Zajímá nás, kolik v něm lze najít jednobarevných (ne nutně disjunktních) trojúhelníků.
 - (a) Dokažte, že jich je aspoň $\lfloor N/6 \rfloor$.
 - (b) Dokažte, že jich je dokonce aspoň $N - 5$.
 - (c) Dokažte, že jich je dokonce aspoň $\varepsilon \binom{N}{3}$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ nezávislou na N . (Najděte co nejlepší odhad na ε .)
4. Nechť M je matice tvaru 10×10 obsahující čísla $1, 2, \dots, 10$, přičemž každé číslo se v ní vyskytuje 10-krát. Dokažte, že M má řádek nebo sloupec obsahující aspoň 4 různá čísla.