Příklady ze cvičení z KGI

středa 21. 3.

Připomeňme tři axiomy projektivní roviny (B, P):

A1: Pro každé dva různé body (tj. prvky B) existuje právě jedna přímka (prvek P), která je oba obsahuje.

A2: Každé dvě různé přímky mají právě jeden společný bod.

A3: Existuje čtveřice bodů, z nichž žádné tři nepatří do společné přímky.

1. Najděte hypergraf (B, P), který splňuje axiomy A1 a A2, ale ne A3. Zkuste najít co nejobecnější konstrukci.

2. Dokažte, že pokud hypergraf (B, P) splňuje A1 a A2, a zároveň obsahuje aspoň dvě přímky s aspoň třemi vrcholy, tak je to projektivní rovina.

3. Najděte příklad nekonečné projektivní roviny.

4. Uvažte hypergraf (B, P), kde prvky B jsou euklidovské přímky v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem a prvky P odpovídají euklidovským rovinám v $\mathbb{R}^3$ obsahujícím počátek; přesněji řečeno, ke každé rovině $r \subseteq \mathbb{R}^3$ obsahující počátek bude P obsahovat množinu

   $$\{p \subseteq r;\ p \text{ je euklidovská přímka procházející počátkem}\}.$$

   Rozmyslete, že (B, P) je projektivní rovina. Rozmyslete, že to bude projektivní rovina, i když se místo prostoru $\mathbb{R}^3$ vezme vektorový prostor T^3, kde T je nějaké konečné těleso, a euklidovské přímky a roviny se nahradí vektorovými podprostory dimenze 1 resp. 2 prostoru T^3.