Osmá série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 15:40)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 23. dubna.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Ukažte, že neexistují žádné dvě matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pro které by platilo $AB - BA = I_n$, kde I_n je jednotková matice tvaru $n \times n$. [2 body]

Příklad 2. Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *idempotentní*, pokud platí $A^2 = A$. Dokažte, že pro každou idempotentní matici A platí, že stopa A je rovna hodnosti A. [2 body] (Zdá-li se vám to těžké, dokažte to aspoň pro speciální případ, kdy matice A popisuje ortogonální projekci na nějaký vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Za to dostanete 1 bod.)

Příklad 3. Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *nilpotentní*, pokud existuje přirozené číslo k takové, že A^k je matice obsahující jen samé nuly. Ukažte, že každá nilpotentní matice má nulovou stopu. [1 bod] Je každá matice s nulovou stopou nilpotentní? [1 bod]