Šestá série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 2. dubna.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad. [1 bod za každé tvrzení]

a) Nechť A a B jsou dvě čtvercové matice tvaru $n \times n$, nechť λ je vlastní číslo matice A a nechť μ je vlastní číslo matice B. Potom $\lambda\mu$ je vlastní číslo matice AB.

b) Matice A má vždy stejná vlastní čísla, jako její transpozice A^{T}.

c) Jestliže A je celočíselná matice, jejíž všechna vlastní čísla jsou reálná, pak pro každé její vlastní číslo λ existuje vlastní vektor, který má všechny složky celočíselné.

Příklad 2. Nechť f a g jsou dvě lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že existuje báze $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že každý vektor v_i je vlastním vektorem zobrazení f i zobrazení g (ne nutně se stejnými vlastními čísly). Dokažte, že potom pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $f(g(x)) = g(f(x))$. [2 body]

Příklad 3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice A a určete, pro které hodnoty α a β je tato matice regulární. [1 bod]

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(Poznámka: zde můžete využít řešení příkladu 2 ze čtvrté série.)