Devátá série domácích úkolů
verze pro cvičení v úterý od 15:40

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 9. května.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

---

1. V tomto příkladu uvažujeme čtvercové tabulky rozdělené na $N \times N$ políček obarvených b barvami. Připomeňme definici podtabulky ze cvičení: podtabulku tvaru $k \times k$ v nějaké tabulce tvaru $N \times N$ získáme tak, že v původní tabulce vybereme libovolných k řádků a k sloupců (ne nutně sousedících) a uvážíme všechna políčka ležící na průniku vybraného sloupce s vybraným řádkem. Dokažte následující tvrzení:

   $\boxed{2}$ (a) Pro libovolné b a pro $N = b^3 + 1$ platí, že v libovolném obarvení tabulky tvaru $N \times N$ existuje podtabulka velikosti 2×2, jejíž políčka jsou všechna obarvena stejnou barvou. (*Poznámka: na cvičení už jsme si dokázali obdobné tvrzení, ovšem s horším odhadem* $N = b^{b+1} + 1$.)

   $\boxed{2}$ (b) Pro libovolná čísla b a k existuje N s následující vlastností: v libovolném obarvení políček tabulky tvaru $N \times N$ pomocí b barev existuje podtabulka velikosti $k \times k$, jejíž políčka jsou všechna obarvena stejnou barvou.

2. Nechť $R(k, \ell)$ označuje nejmenší číslo N takové, že každý graf na N vrcholech obsahuje kliku velikosti k nebo nezávislou množinu velikosti ℓ.

   $\boxed{1}$ (a) Čemu se rovná $R(3, 3)$?

   $\boxed{2+2}$ (b) Dokažte, že $8 \leq R(3, 4) \leq 10$ (za to získáte dva body; za každé zpřesnění horního či dolního odhadu o 1 získáte bod navíc).