

Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v úterý 24. listopadu.

Vrcholovou barevnost grafu G značím $\chi(G)$.

Příklad 1. Nakreslete na projektivní rovinu co největší úplný graf [za K_5 získáte 1 bod, za K_6 2 body].

Příklad 2. Najděte graf, který obsahuje K_5 jako minor, ale neobsahuje dělení K_5 jako podgraf [2 body].

Příklad 3. Připomeňme, že graf se nazývá *d-degenerovaný*, pokud každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýš d . Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je *d-degenerovaný* právě tehdy, když jeho vrcholy lze seřadit do posloupnosti v_1, v_2, \dots, v_n tak, že pro každé $i \geq 1$ platí, že vrchol v_i má nejvýše d sousedů mezi vrcholy v_1, v_2, \dots, v_{i-1} [2 body].

Příklad 4. Ukažte, že každý *d-degenerovaný* graf má průměrný stupeň nejvýše $2d$ [2 body].

Příklad 5. Necht $G = (V, E)$ je graf, a necht \bar{G} je doplněk grafu G , tj. $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

- Dokažte, že $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$ [2 body].
- Dokažte, že $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ [3 body].