Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

verze pro cvičení v pátek 10:40

Termín odevzdání: čtvrtek 3. března.

Čísla ve čtverečku označují počty bodů, které za daný příklad můžete získat.

Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

Symbol $[n]$ označuje množinu čísel $\{1, 2, \dots, n\}$.

$\boxed{2}$ 1. Pro následující dvě funkce rozhodněte, která z nich roste rychleji (řekneme, že funkce $f_1(n)$ *roste rychleji* než funkce $f_2(n)$, pokud pro každé dost velké $n \in \mathbb{N}$ platí, že $f_1(n) > f_2(n)$).

- $f(n)$ je počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$.
- $g(n)$ je počet grafů na množině vrcholů $[100n]$ takových, že každý vrchol má stupeň přesně 100.

$\boxed{2}$ 2. Následující tři funkce uspořádejte podle toho, jak rychle rostou.

- $f_1(n) = \lfloor n/3 \rfloor!$
- $f_2(n) = \binom{n^2+13n-42}{2n}$
- $f_3(n) = \sum_{k=0}^{n^2} 2^{\sqrt{k}}$

$\boxed{2+2}$ 3. Označme $r(n)$ počet rovinných grafů na množině vrcholů $[n]$ a $g(n)$ počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$. Dokažte, že pro každé dostatečně velké n platí

$$r(\lfloor n^{1.999} \rfloor) < g(n) < r(n^2).$$

Za každou nerovnost můžete dostat 2 body. Zdá-li se vám to těžké, zkuste aspoň dokázat obdobné nerovnosti, ve kterých funkci $\lfloor n^{1.999} \rfloor$ (nebo n^2) nahradíte nějakou jinou funkcí, pokud možno co největší (resp. co nejmenší). Nápověda: můžete třeba využít toho, že rovinný graf na n vrcholech nemůže mít více než $3n - 6$ hran.