Šestá série domácích úkolů
verze pro cvičení v úterý od 12:20

- Lhůta pro dodání řešení je úterý 7. dubna v 6 hodin ráno.
- Svá řešení mi posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo mi je po předchozí domluvě přineste osobně.
- Řešení by mělo obsahovat nejen konečný výsledek, ale i postup, jak jste k výsledku dospěli.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit prezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

$\boxed{2}$ 1. Nechť G je graf, jehož každý vrchol má stupeň nejvýš 3. Dokažte, že $k_e(G) = k_v(G)$.

2. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

$\boxed{1}$ (a) Pro libovolný graf G a libovolnou jeho hranu e platí $k_e(G) \geq k_e(G - e)$.

$\boxed{1}$ (b) Pro libovolný graf G a libovolný jeho vrchol v platí $k_e(G - v) \geq k_e(G) - 1$.

$\boxed{2}$ 3. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově k-souvislý graf, a nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je nějaká k-tice různých vrcholů G. Vyrobme nový graf H tak, že ke G přidáme nový vrchol x a k nových hran $\{x, v_1\}$, $\{x, v_2\}$, $\ldots$, $\{x, v_k\}$. Dokažte, že H je vrcholově k-souvislý.

$\boxed{1+2}$ 4. Nechť G je graf s alespoň $k + 1$ vrcholy. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

a) G je vrcholově k-souvislý.

b) G pro libovolnou $(k+1)$-tici různých vrcholů $(x, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ lze v G najít k-tici cest $P_1, \ldots, P_k$, kde P_i spojuje vrchol x s vrcholem v_i, a žádné dvě tyto cesty nemají kromě x žádný společný vrchol.

Za jednu implikaci dostanete 1 bod, za obě 3 body. Při řešení tohoto příkladu se vám může hodit tvrzení z příkladu 3. Toto tvrzení smíte použít, i kdybyste příklad 3 neuměli vyřešit.