Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

pátá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 26. 3. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2}$ 1. Uvažme posloupnost čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující následující tři vlastnosti:

- $a_0 = 1$,
- $a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2}$ pro každé $n \geq 2$ a
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Najděte vytvořující funkci této posloupnosti a odvoďte z ní explicitní vzorec pro a_n. Pokud existuje více takových posloupností, najděte je všechny.

$\boxed{2}$ 2. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d (kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ jsou libovolné reálné konstanty). Dokažte, že existují reálné konstanty $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_d$ takové, že pro každé x platí

$$p(x) = \beta_d \binom{x}{d} + \beta_{d-1}\binom{x}{d-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Nápověda: jde to dokázat třeba indukcí podle d.

$\boxed{2}$ 3. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d. Definujme částečné součty $s_n = p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$. Dokažte, že s_n se rovnají nějakému polynomu stupně $d+1$. Jinými slovy, dokažte, že existuje polynom $q(x)$ stupně $d+1$ takový, že pro každé $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ platí $s_n = q(n)$. Pokud umíte vyřešit předchozí příklad, můžete ho zde využít.

$\boxed{2}$ 4. Označme a_n počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet libovolného lichého počtu sčítanců, a nechť b_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet sudého počtu sčítanců, přičemž v obou případech jsou sčítanci libovolná kladná celá čísla a součty lišící se jen pořadím sčítanců pokládáme za různé. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ platí $a_n = b_n$.