Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

šestá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 17:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 3. 4. v 17:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{3+1}$ 1. Mějme množinový systém $\mathcal{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Ze systému $\mathcal{S}$ můžeme odebrat nejvýše deset množin tak, aby zbývající množiny měly systém různých reprezentantů. (Formálně řečeno, $\exists \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \colon |\mathcal{S}'| \geq n - 10$ a $\mathcal{S}'$ má SRR.)
2. Systém $\mathcal{S}$ splní následující "Hallovu podmínku s deficitem":

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \colon \left| \bigcup_{i \in I} M_i \right| \geq |I| - 10.$$

Za důkaz jedné implikace dostanete jeden bod, za důkaz obou čtyři body.

$\boxed{2}$ 2. Nechť $[n]$ označuje množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $\binom{[n]}{k}$ označuje systém všech k-prvkových podmnožin množiny $[n]$. Pro která přirozená čísla $k \leq n$ platí, že $\binom{[n]}{k}$ má systém různých reprezentantů?

$\boxed{2}$ 3. Nechť $G = (V, E)$ je graf takový, že pro libovolný jeho podgraf $H = (V', E')$ platí, že $|E'| \leq 10|V'|$. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, aby do každého vrcholu G vstupovalo nejvýše 10 hran.