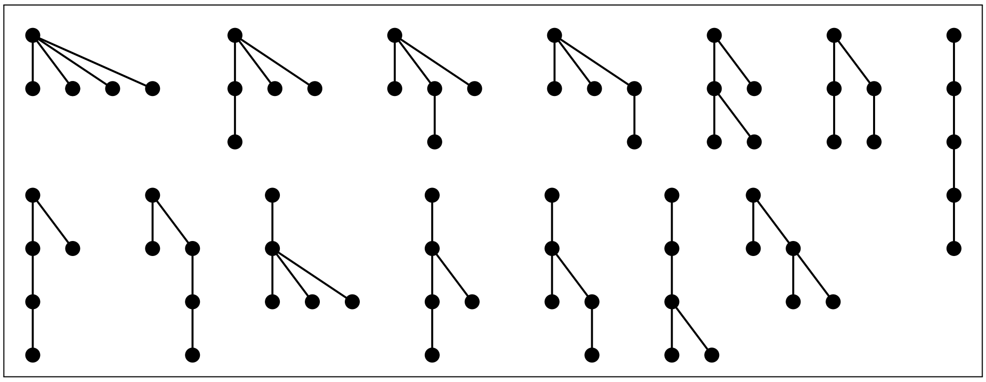
Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

pátá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 17:20

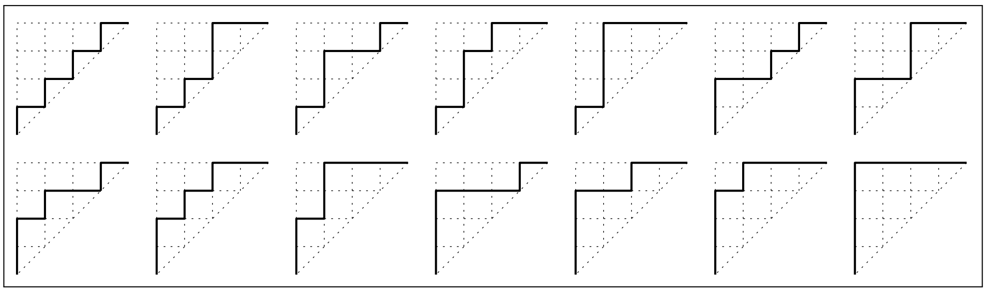
Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 27. 3. v 17:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2}$ 1. Každá ze čtyř níže definovaných posloupností ukazuje jeden kombinatorický význam Catalanových čísel: platí $a_n = b_n = c_n = d_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Vyberte si z těch čtyř posloupností jednu a dokažte, že její členy jsou opravdu Catalanova čísla. K zisku plného počtu dvou bodů opravdu stačí dokázat toto jen pro jednu ze čtyř posloupností. Můžete to samozřejmě dokázat pro více z nich, a v tom případě dostanete dva body, pokud aspoň jeden z vašich důkazů bude správný. Za každou definicí následuje příklad ilustrující situaci pro $n = 4$.

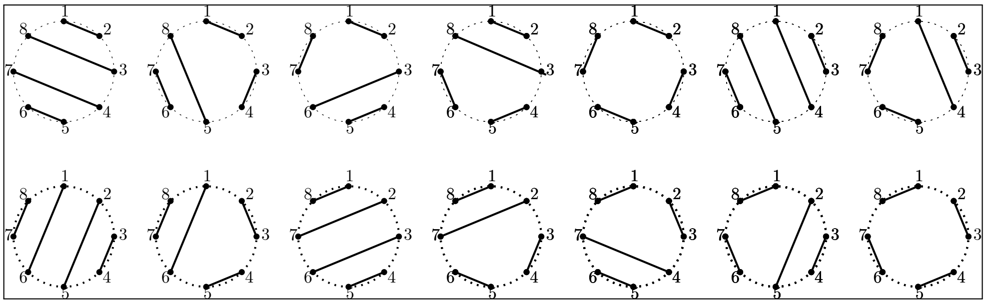
- ("Zakořeněné stromy") a_n je počet zakořeněných stromů s n hranami. Dva zakořeněné stromy pokládáme za různé, i když se liší jen změnou pořadí potomků nějakého vrcholu.



- ("Cesty nad diagonálou") b_n je počet mřížových cest z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, n) takových, že žádný bod cesty neleží pod přímkou určenou rovnicí $y = x$. Mřížovou cestou se myslí cesta, která se v každém kroku posune buď o jednu jednotku nahoru, nebo o jednu jednotku doprava.



- ("Nekřížící párování") c_n je počet způsobů, jak spárovat $2n$ bodů na kružnici do n dvojic pomocí n disjunktních nekřížících se úseček.



- ("Permutace bez 321") d_n je počet způsobů, jak seřadit čísla $1, 2, \dots, n$ do posloupnosti délky n obsahující každé z těchto čísel právě jednou tak, aby tato posloupnost neobsahovala klesající podposloupnost délky 3. Pro $n = 4$ máme možnosti (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3), (2,3,1,4), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,2,4), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (4,1,2,3).

$\boxed{2}$ 2. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d (tj. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ jsou reálné konstanty a $\alpha_d \neq 0$). Dokažte, že existují reálná čísla $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$ taková, že pro každé x platí

$$p(x) = \beta_d \binom{x}{d} + \beta_{d-1}\binom{x}{d-1} + \cdots + \beta_1 \binom{x}{1} + \beta_0.$$

Nápověda: jde to dokázat třeba indukcí podle d.

$\boxed{2}$ 3. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d. Definujme částečné součty $s_n = p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$. Dokažte, že s_n se rovná nějakému polynomu stupně $d + 1$. Jinými slovy, dokažte, že existuje polynom $q(x)$ stupně $d + 1$ takový, že pro každé $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí $s_n = q(n)$.

$\boxed{2}$ 4. Nechť ℓ_n je počet způsobů, jak lze číslo n získat jako součet libovolného počtu lichých čísel, a nechť b_n je počet způsobů, jak lze číslo n získat jako součet libovolného počtu přirozených čísel větších než 1. V obou případech součty lišící se jen pořadím sčítanců pokládáme za různé. Uvažujme pouze součty s nenulovým počtem sčítanců, tj. $\ell_0 = b_0 = 0$. Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $\ell_n = b_{n+1}$.