Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 6. 3. ve 12:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.
Symbol $[n]$ označuje množinu čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Pro každou následující dvojici funkcí (f_i, g_i) rozhodněte, která funkce ve dvojici je "větší" (řekneme, že f je větší než g, pokud pro každé dost velké $n \in \mathbb{N}$ platí, že $f(n) > g(n)$).

   $\boxed{2}$ (a) $f_1(n) = \binom{10n}{\lceil\sqrt{n}\rceil}$ a $g_1(n) = n^{\sqrt{n}}$.

   $\boxed{3}$ (b) $f_2(n)$ je počet podmnožin množiny $[2n]$, které mají přesně n prvků, a $g_2(n)$ je počet podmnožin množiny $[2n]$, které mají nejvýše $0.999n$ prvků. Zdá-li se vám to těžké, nahraďte si 0.999 nějakou jinou konstantou $c \in (0, 1)$ dle vašeho výběru a vyřešte aspoň takto upravené zadání (za to dostanete 2 body).

$\boxed{2+2}$ 2. Označme $r(n)$ počet rovinných grafů na množině vrcholů $[n]$ a $g(n)$ počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$. Dokažte, že pro každé dostatečně velké n platí

$$r(\lfloor n^{1.999}\rfloor) < g(n) < r(n^2).$$

Za každou nerovnost můžete dostat 2 body. Zdá-li se vám to těžké, zkuste aspoň dokázat obdobné nerovnosti, ve kterých funkci $\lfloor n^{1.999}\rfloor$ (nebo n^2) nahradíte nějakou jinou funkcí, pokud možno co největší (resp. co nejmenší). Nápověda: můžete třeba využít toho, že rovinný graf na n vrcholech nemůže mít více než $3n - 6$ hran.